Procházka světem vektorových prostorů

Pavel Klavík

Katedra aplikované matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze

Motto

Lineární algebra je užitečná formalizace geometrických pojmů se spoustou aplikací.

- Počátky souvisí s řešením soustav lineárních rovnic a analýzou.
- Jména jako Leibnitz, Lagrange, Gauss, Sylvester, . . .
- Současná podoba z půlky 19. století, v souvislosti s rozvojem moderní algebry.
- Je to teorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení.

Motto

Lineární algebra je užitečná formalizace geometrických pojmů se spoustou aplikací.

- Počátky souvisí s řešením soustav lineárních rovnic a analýzou.
- Jména jako Leibnitz, Lagrange, Gauss, Sylvester, ...
- Současná podoba z půlky 19. století, v souvislosti s rozvojem moderní algebry.
- Je to teorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení.

Motto

Lineární algebra je užitečná formalizace geometrických pojmů se spoustou aplikací.

- Počátky souvisí s řešením soustav lineárních rovnic a analýzou.
- Jména jako Leibnitz, Lagrange, Gauss, Sylvester, . . .
- Současná podoba z půlky 19. století, v souvislosti s rozvojem moderní algebry.
- Je to teorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení.

Motto

Lineární algebra je užitečná formalizace geometrických pojmů se spoustou aplikací.

- Počátky souvisí s řešením soustav lineárních rovnic a analýzou.
- Jména jako Leibnitz, Lagrange, Gauss, Sylvester, ...
- Současná podoba z půlky 19. století, v souvislosti s rozvojem moderní algebry.
- Je to teorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení.

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice . . .

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice . . .

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice ...

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice . . .

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice . . .

Lineární algebra má spoustu úžasných aplikací:

- Užitečné algoritmy: Gaussova eliminace, lineární programování.
- Umožňuje snadno popisovat geometrické transformace a zodpovídat geometrické otázky.

Ale také řešit otázky, které nemají s geometrií vůbec nic společného:

- Vektorové prostory nad konečnými tělesy (třeba $\mathbb{GF}(2)$) mají aplikace například v kombinatorice a teorii grafů.
- Vlastní čísla matic: řešení diferenciálních rovnic, iterace zobrazení (Google), spektrální teorie grafů (náhodné procházky, grafové parametry).
- Rozsáhlé aplikace v kombinatorice, analýze, statistice a fyzice . . .

O čem si teď budeme povídat:

1. Definice klíčových pojmů: vektorové prostory, obaly, báze, . . .
2. Po cestě: Pár triku a překvapení.
3. Lineární zobrazení spolu s několika ukázkami.
4. Affiní zobrazení z přednášky, aneb jeden velký podvod.
5. Na závěr: Několik dalších střípků z lineární algebry.

O čem si teď budeme povídat:

1. Definice klíčových pojmů: vektorové prostory, obaly, báze, . . .
2. Po cestě: Pár triku a překvapení.
3. Lineární zobrazení spolu s několika ukázkami.
4. Affiní zobrazení z přednášky, aneb jeden velký podvod.
5. Na závěr: Několik dalších střípků z lineární algebry.

O čem si teď budeme povídat:

1. Definice klíčových pojmů: vektorové prostory, obaly, báze, . . .
2. Po cestě: Pár triku a překvapení.
3. Lineární zobrazení spolu s několika ukázkami.
4. Affiní zobrazení z přednášky, aneb jeden velký podvod.
5. Na závěr: Několik dalších střípků z lineární algebry.

O čem si teď budeme povídat:

1. Definice klíčových pojmů: vektorové prostory, obaly, báze, . . .
2. Po cestě: Pár triku a překvapení.
3. Lineární zobrazení spolu s několika ukázkami.
4. Affiní zobrazení z přednášky, aneb jeden velký podvod.
5. Na závěr: Několik dalších střípků z lineární algebry.

O čem si teď budeme povídat:

1. Definice klíčových pojmů: vektorové prostory, obaly, báze, . . .
2. Po cestě: Pár triku a překvapení.
3. Lineární zobrazení spolu s několika ukázkami.
4. Affiní zobrazení z přednášky, aneb jeden velký podvod.
5. Na závěr: Několik dalších střípků z lineární algebry.

Definice

Těleso je množina čísel spolu s operacemi $\oplus$ a $\odot$, které mají hezké vlastnosti.

- Operace jsou asociativní, komutativní, mají neutrální a inverzní prvky a jsou svázané distributivitou.
- Výsledkem je překvapivě pravidelná struktura.

Příklad

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ a komplexní čísla $\mathbb{C}$.
- Konečná tělesa $\mathbb{GF}(p^n)$ – třeba velice důležité $\mathbb{GF}(2)$.

Definice

Těleso je množina čísel spolu s operacemi $\oplus$ a $\odot$, které mají hezké vlastnosti.

- Operace jsou asociativní, komutativní, mají neutrální a inverzní prvky a jsou svázané distributivitou.
- Výsledkem je překvapivě pravidelná struktura.

Příklad

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ a komplexní čísla $\mathbb{C}$.
- Konečná tělesa $\mathbb{GF}(p^n)$ – třeba velice důležité $\mathbb{GF}(2)$.

Definice

Těleso je množina čísel spolu s operacemi $\oplus$ a $\odot$, které mají hezké vlastnosti.

- Operace jsou asociativní, komutativní, mají neutrální a inverzní prvky a jsou svázané distributivitou.
- Výsledkem je překvapivě pravidelná struktura.

Příklad

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ a komplexní čísla $\mathbb{C}$.
- Konečná tělesa $\mathbb{GF}(p^n)$ – třeba velice důležité $\mathbb{GF}(2)$.

Definice

Těleso je množina čísel spolu s operacemi $\oplus$ a $\odot$, které mají hezké vlastnosti.

- Operace jsou asociativní, komutativní, mají neutrální a inverzní prvky a jsou svázané distributivitou.
- Výsledkem je překvapivě pravidelná struktura.

Příklad

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ a komplexní čísla $\mathbb{C}$.
- Konečná tělesa $\mathbb{GF}(p^n)$ – třeba velice důležité $\mathbb{GF}(2)$.

Definice

Vektorový prostor nad tělesem je množina vektorů spolu s hezkými operacemi $+$ a $\cdot$.

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem – výsledek zase vektor.
- Sčítání vektorů je komutativní a asociativní.
- Existuje počátek (nulový vektor) a opačné vektory.
- Výsledek je opět pravidelná struktura velice silných vlastností.

Definice

Vektorový prostor nad tělesem je množina vektorů spolu s hezkými operacemi $+$ a $\cdot$.

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem – výsledek zase vektor.
- Sčítání vektorů je komutativní a asociativní.
- Existuje počátek (nulový vektor) a opačné vektory.
- Výsledek je opět pravidelná struktura velice silných vlastností.

Definice

Vektorový prostor nad tělesem je množina vektorů spolu s hezkými operacemi $+$ a $\cdot$.

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem – výsledek zase vektor.
- Sčítání vektorů je komutativní a asociativní.
- Existuje počátek (nulový vektor) a opačné vektory.
- Výsledek je opět pravidelná struktura velice silných vlastností.

Definice

Vektorový prostor nad tělesem je množina vektorů spolu s hezkými operacemi $+$ a $\cdot$.

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem – výsledek zase vektor.
- Sčítání vektorů je komutativní a asociativní.
- Existuje počátek (nulový vektor) a opačné vektory.
- Výsledek je opět pravidelná struktura velice silných vlastností.

Definice

Vektorový prostor nad tělesem je množina vektorů spolu s hezkými operacemi $+$ a $\cdot$.

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem – výsledek zase vektor.
- Sčítání vektorů je komutativní a asociativní.
- Existuje počátek (nulový vektor) a opačné vektory.
- Výsledek je opět pravidelná struktura velice silných vlastností.

Příklad (Body v $\mathbb{R}^n$)

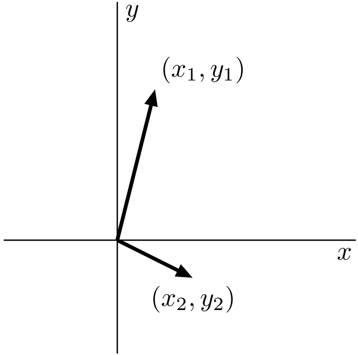
Každý vektor je n-tice reálných čísel, operace sčítaní a násobení fungují po složkách.

- Vektory jsou body v rovině o daných souřadnicích.
- Sčítání odpovídá doplnění na rovnoběžník.
- Násobení skalárem odpovídá prodlužování vektorů.

Příklad (Body v $\mathbb{R}^n$)

Každý vektor je n-tice reálných čísel, operace sčítaní a násobení fungují po složkách.

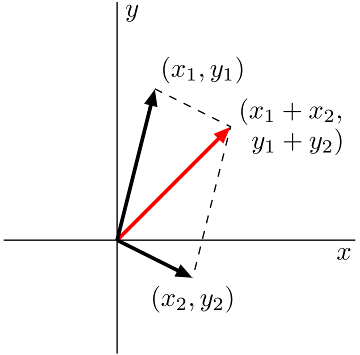
- Vektory jsou body v rovině o daných souřadnicích.
- Sčítání odpovídá doplnění na rovnoběžník.
- Násobení skalárem odpovídá prodlužování vektorů.



Příklad (Body v $\mathbb{R}^n$)

Každý vektor je n-tice reálných čísel, operace sčítaní a násobení fungují po složkách.

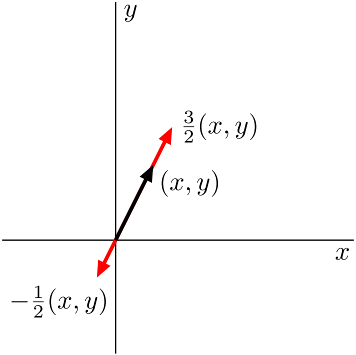
- Vektory jsou body v rovině o daných souřadnicích.
- Sčítání odpovídá doplnění na rovnoběžník.
- Násobení skalárem odpovídá prodlužování vektorů.



Příklad (Body v $\mathbb{R}^n$)

Každý vektor je n-tice reálných čísel, operace sčítaní a násobení fungují po složkách.

- Vektory jsou body v rovině o daných souřadnicích.
- Sčítání odpovídá doplnění na rovnoběžník.
- Násobení skalárem odpovídá prodlužování vektorů.



Příklad (Vektorový prostor funkcí)

Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, operace sčítání a násobení opět po složkách.

- Pro $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dostáváme prostor $\mathbb{R}^n$.
- Pro $M = \mathbb{N}$ dostáváme prostor všech reálných posloupností.
- Pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí.

Příklad (Těleso jako vektorový prostor)

Každé konečné těleso charakteristiky p je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad (Vektorový prostor funkcí)

Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, operace sčítání a násobení opět po složkách.

- Pro $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dostáváme prostor $\mathbb{R}^n$.
- Pro $M = \mathbb{N}$ dostáváme prostor všech reálných posloupností.
- Pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí.

Příklad (Těleso jako vektorový prostor)

Každé konečné těleso charakteristiky p je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad (Vektorový prostor funkcí)

Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, operace sčítání a násobení opět po složkách.

- Pro $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dostáváme prostor $\mathbb{R}^n$.
- Pro $M = \mathbb{N}$ dostáváme prostor všech reálných posloupností.
- Pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí.

Příklad (Těleso jako vektorový prostor)

Každé konečné těleso charakteristiky p je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad (Vektorový prostor funkcí)

Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, operace sčítání a násobení opět po složkách.

- Pro $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dostáváme prostor $\mathbb{R}^n$.
- Pro $M = \mathbb{N}$ dostáváme prostor všech reálných posloupností.
- Pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí.

Příklad (Těleso jako vektorový prostor)

Každé konečné těleso charakteristiky p je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Příklad (Vektorový prostor funkcí)

Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, operace sčítání a násobení opět po složkách.

- Pro $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dostáváme prostor $\mathbb{R}^n$.
- Pro $M = \mathbb{N}$ dostáváme prostor všech reálných posloupností.
- Pro $M = \mathbb{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí.

Příklad (Těleso jako vektorový prostor)

Každé konečné těleso charakteristiky p je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

Definition (Vektorový podprostor a lineární obal)

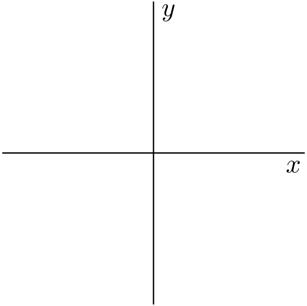
Množina vektorů tvoří podprostor vektorového prostoru, pokud je uzavřená na operace. Lineární obal množiny vektorů je nejmenší vektorový podprostor, který tyto vektory obsahuje.

Jak vypadají lineární obaly a podprostory $\mathbb{R}^2$??

Definition (Vektorový podprostor a lineární obal)

Množina vektorů tvoří podprostor vektorového prostoru, pokud je uzavřená na operace. Lineární obal množiny vektorů je nejmenší vektorový podprostor, který tyto vektory obsahuje.

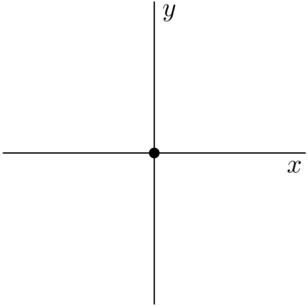
Jak vypadají lineární obaly a podprostory $\mathbb{R}^2$??



Definition (Vektorový podprostor a lineární obal)

Množina vektorů tvoří podprostor vektorového prostoru, pokud je uzavřená na operace. Lineární obal množiny vektorů je nejmenší vektorový podprostor, který tyto vektory obsahuje.

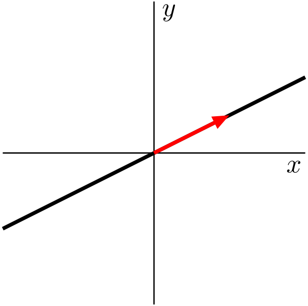
Jak vypadají lineární obaly a podprostory $\mathbb{R}^2$??



Definition (Vektorový podprostor a lineární obal)

Množina vektorů tvoří podprostor vektorového prostoru, pokud je uzavřená na operace. Lineární obal množiny vektorů je nejmenší vektorový podprostor, který tyto vektory obsahuje.

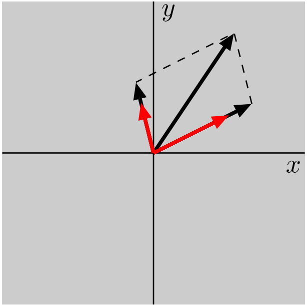
Jak vypadají lineární obaly a podprostory $\mathbb{R}^2$??



Definition (Vektorový podprostor a lineární obal)

Množina vektorů tvoří podprostor vektorového prostoru, pokud je uzavřená na operace. Lineární obal množiny vektorů je nejmenší vektorový podprostor, který tyto vektory obsahuje.

Jak vypadají lineární obaly a podprostory $\mathbb{R}^2$??



Definice (Lineární kombinace)

Lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_n$ s koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

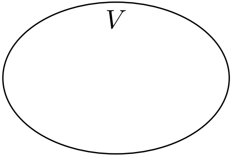
- Lineární kombinace jsou vše, co lze z vektorů operacemi získat.
- Jinými slovy: lineární obal je množina všech lineárních kombinací.

Definice (Lineární kombinace)

Lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$ s koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

- Lineární kombinace jsou vše, co lze z vektorů operacemi získat.
- Jinými slovy: lineární obal je množina všech lineárních kombinací.

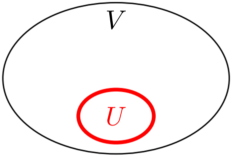


Definice (Lineární kombinace)

Lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_n$ s koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

- Lineární kombinace jsou vše, co lze z vektorů operacemi získat.
- Jinými slovy: lineární obal je množina všech lineárních kombinací.

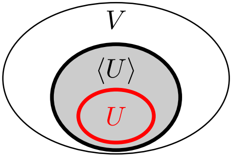


Definice (Lineární kombinace)

Lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_n$ s koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

- Lineární kombinace jsou vše, co lze z vektorů operacemi získat.
- Jinými slovy: lineární obal je množina všech lineárních kombinací.



Definice (Lineárně nezávislá množina)

Množina vektorů je lineárně nezávislá, pokud žádný z nich není lineární kombinací ostatních.

- Jinými slovy: Žádný vektor není nadbytečný.
- Koeficienty lineární kombinace každého vektoru lineárního obalu jsou určeny jednoznačně.

Definice (Generátor)

Množina vektorů je generátor, pokud jejich lineární obal je celý vektorový prostor.

Definice (Lineárně nezávislá množina)

Množina vektorů je lineárně nezávislá, pokud žádný z nich není lineární kombinací ostatních.

- Jinými slovy: Žádný vektor není nadbytečný.
- Koeficienty lineární kombinace každého vektoru lineárního obalu jsou určeny jednoznačně.

Definice (Generátor)

Množina vektorů je generátor, pokud jejich lineární obal je celý vektorový prostor.

Definice (Lineárně nezávislá množina)

Množina vektorů je lineárně nezávislá, pokud žádný z nich není lineární kombinací ostatních.

- Jinými slovy: Žádný vektor není nadbytečný.
- Koeficienty lineární kombinace každého vektoru lineárního obalu jsou určeny jednoznačně.

Definice (Generátor)

Množina vektorů je generátor, pokud jejich lineární obal je celý vektorový prostor.

Definice (Báze)

Báze je lineárně nezávislý generátor.

- Báze je nejmenší množina plně popisující celý vektorový prostor.
- Definuje souřadný systém – koeficienty lineárních kombinací.

Věta (Steinitz)

Všechny báze vektorového prostoru mají stejnou velikost. Tato velikost se nazývá dimenze.

Definice (Báze)

Báze je lineárně nezávislý generátor.

- Báze je nejmenší množina plně popisující celý vektorový prostor.
- Definuje souřadný systém – koeficienty lineárních kombinací.

Věta (Steinitz)

Všechny báze vektorového prostoru mají stejnou velikost. Tato velikost se nazývá dimenze.

Definice (Báze)

Báze je lineárně nezávislý generátor.

- Báze je nejmenší množina plně popisující celý vektorový prostor.
- Definuje souřadný systém – koeficienty lineárních kombinací.

Věta (Steinitz)

Všechny báze vektorového prostoru mají stejnou velikost. Tato velikost se nazývá dimenze.

Příklad (Trik jako  . . .)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Příklad (Trik jako ...)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \implies \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

$\square$

Příklad (Trik jako  . . .)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. □

Příklad (Trik jako ...)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Příklad (Trik jako . . .)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Příklad (Trik jako  . . .)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Příklad (Trik jako  . . .)

Pro posloupnost Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

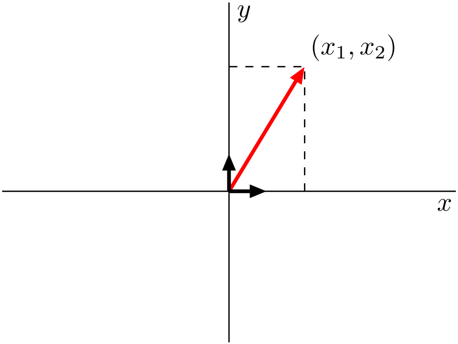
- Vektorový prostor Fibonacciovských posloupností $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ má dimenzi dva.
- Existuje Fibonacciovská posloupnost $a_n = x^n$ pro nenulové x?

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \quad \Longrightarrow \quad x^2 = x + 1.$$

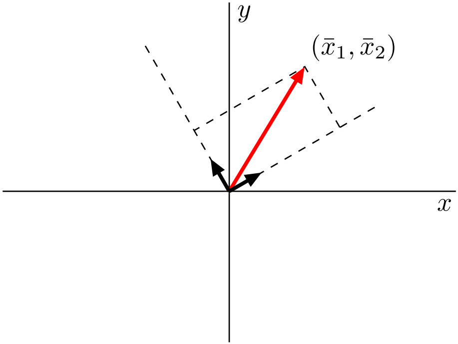
- Tedy pro $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jsou x_1^n a x_2^n Fibonacciovské.
- Tyto dvě posloupnosti tvoří bázi, vůči které spočítáme souřadnice: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $\square$

- Budeme se zabývat geometrickými zobrazeními z pohledu lineární algebry.
- Kdybychom uměli přepočítat souřadnice vektoru vůči různým bázím:

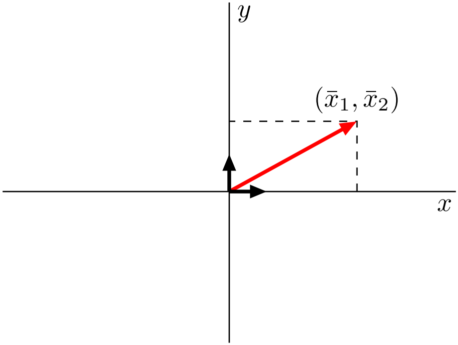
- Budeme se zabývat geometrickými zobrazeními z pohledu lineární algebry.
- Kdybychom uměli přepočítat souřadnice vektoru vůči různým bázím:



- Budeme se zabývat geometrickými zobrazeními z pohledu lineární algebry.
- Kdybychom uměli přepočítat souřadnice vektoru vůči různým bázím:



- Budeme se zabývat geometrickými zobrazeními z pohledu lineární algebry.
- Kdybychom uměli přepočítat souřadnice vektoru vůči různým bázím:



Definice (Lineární zobrazení)

Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá lineární, pokud splňuje podmínky

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

- Takovým zobrazením se v algebře říká homomorfismy, zachovávají strukturu.
- : Každé lineární zobrazení zachovává počátek:

$$f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0.$$

- Podobně pro lineární kombinace platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i).$$

Definice (Lineární zobrazení)

Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá lineární, pokud splňuje podmínky

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

- Takovým zobrazením se v algebře říká homomorfismy, zachovávají strukturu.
- : Každé lineární zobrazení zachovává počátek:

$$f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0.$$

- Podobně pro lineární kombinace platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i).$$

Definice (Lineární zobrazení)

Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá lineární, pokud splňuje podmínky

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

- Takovým zobrazením se v algebře říká homomorfismy, zachovávají strukturu.
- 👁: Každé lineární zobrazení zachovává počátek:

$$f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0.$$

- Podobně pro lineární kombinace platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i).$$

Definice (Lineární zobrazení)

Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá lineární, pokud splňuje podmínky

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

- Takovým zobrazením se v algebře říká homomorfismy, zachovávají strukturu.
- : Každé lineární zobrazení zachovává počátek:

$$f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0.$$

- Podobně pro lineární kombinace platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i).$$

- Lineární zobrazení je plně určené obrazem libovolné báze!
- Ke každému vektoru si budeme pamatovat souřadnice vůči cílové bázi.
- Tyto souřadnice zapíšeme do sloupečků vedle sebe – takové tabulce říkejme matice.
- Nechť $f : U \to V$ s dimenzemi m a n.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

- Lineární zobrazení je plně určené obrazem libovolné báze!
- Ke každému vektoru si budeme pamatovat souřadnice vůči cílové bázi.
- Tyto souřadnice zapíšeme do sloupečků vedle sebe – takové tabulce říkejme matice.
- Nechť $f : U \to V$ s dimenzemi m a n.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

- Lineární zobrazení je plně určené obrazem libovolné báze!
- Ke každému vektoru si budeme pamatovat souřadnice vůči cílové bázi.
- Tyto souřadnice zapíšeme do sloupečků vedle sebe – takové tabulce říkejme matice.
- Nechť $f : U \to V$ s dimenzemi m a n.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Otázka

Jak zjistit obraz vektoru daných souřadnic?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Longrightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_m\mathbf{b}_m$, tedy

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i a_{1,i} \\ \sum x_i a_{2,i} \\ \vdots \\ \sum x_i a_{n,i} \end{pmatrix}$$

Otázka

Jak zjistit obraz vektoru daných souřadnic?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \implies f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + x_m \mathbf{b}_m$, tedy

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i a_{1,i} \\ \sum x_i a_{2,i} \\ \vdots \\ \sum x_i a_{n,i} \end{pmatrix}$$

Otázka

Jak zjistit obraz vektoru daných souřadnic?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Longrightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_m\mathbf{b}_m$, tedy

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i a_{1,i} \\ \sum x_i a_{2,i} \\ \vdots \\ \sum x_i a_{n,i} \end{pmatrix}$$

Otázka

Jak zjistit vzor vektoru daných souřadnic?

- Jinými slovy chceme nalézt všechny vektory $\mathbf{x}$ splňující:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,m}x_m & = & x'_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,m}x_m & = & x'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,m}x_m & = & x'_n \end{array}$$

- To je soustava lineárních rovnic, kterou umíme řešit Gaussovou eliminací.
- Ta transformuje obraz $f(\mathbf{x})$ a zobrazení f do tvaru, ve kterém je snadné dopočítat výsledek. Přitom nemění hledané vektory $\mathbf{x}$.

Otázka

Jak zjistit vzor vektoru daných souřadnic?

- Jinými slovy chceme nalézt všechny vektory **x** splňující:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,m}x_m & = & x'_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,m}x_m & = & x'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,m}x_m & = & x'_n \end{array}$$

- To je soustava lineárních rovnic, kterou umíme řešit Gaussovou eliminací.
- Ta transformuje obraz $f(\mathbf{x})$ a zobrazení f do tvaru, ve kterém je snadné dopočítat výsledek. Přitom nemění hledané vektory **x**.

Otázka

Jak zjistit vzor vektoru daných souřadnic?

- Jinými slovy chceme nalézt všechny vektory **x** splňující:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,m}x_m & = & x'_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,m}x_m & = & x'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + \cdots + & a_{n,m}x_m & = & x'_n \end{array}$$

- To je soustava lineárních rovnic, kterou umíme řešit Gaussovou eliminací.
- Ta transformuje obraz $f(\mathbf{x})$ a zobrazení f do tvaru, ve kterém je snadné dopočítat výsledek. Přitom nemění hledané vektory **x**.

Otázka

Jak zjistit vzor vektoru daných souřadnic?

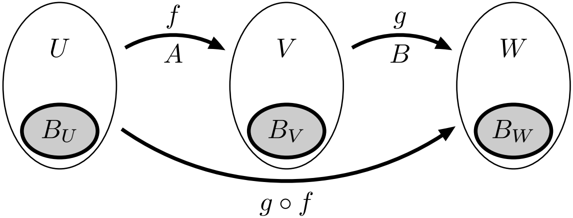
- Jinými slovy chceme nalézt všechny vektory **x** splňující:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & +\cdots+ & a_{1,m}x_m & = & x'_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & +\cdots+ & a_{2,m}x_m & = & x'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & +\cdots+ & a_{n,m}x_m & = & x'_n \end{array}$$

- To je soustava lineárních rovnic, kterou umíme řešit Gaussovou eliminací.
- Ta transformuje obraz $f(\mathbf{x})$ a zobrazení f do tvaru, ve kterém je snadné dopočítat výsledek. Přitom nemění hledané vektory **x**.

Otázka

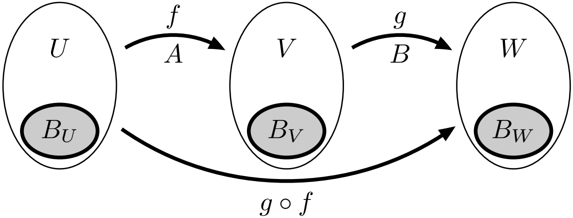
Jak skládat lineární zobrazení?



- Potřebujeme zjistit obrazy vektorů báze B_U vůči bázi B_W.
- Rozsekáme matici A na sloupečky a zobrazíme je pomocí g – obrazy budou sloupečky matice $B \cdot A$.
- Výsledek odpovídá maticovému násobení $B \cdot A$.

Otázka

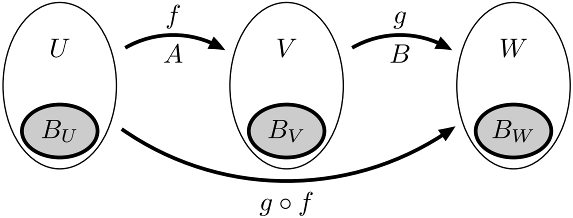
Jak **skládat** lineární zobrazení?



- Potřebujeme zjistit **obrazy vektorů** báze B_U vůči bázi B_W.
- Rozsekáme matici A na sloupečky a zobrazíme je pomocí g – obrazy budou sloupečky matice $B \cdot A$.
- Výsledek odpovídá **maticovému násobení** $B \cdot A$.

Otázka

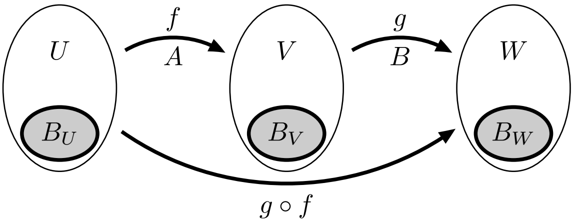
Jak skládat lineární zobrazení?



- Potřebujeme zjistit obrazy vektorů báze B_U vůči bázi B_W.
- Rozsekáme matici A na sloupečky a zobrazíme je pomocí g – obrazy budou sloupečky matice $B \cdot A$.
- Výsledek odpovídá maticovému násobení $B \cdot A$.

Otázka

Jak **skládat** lineární zobrazení?

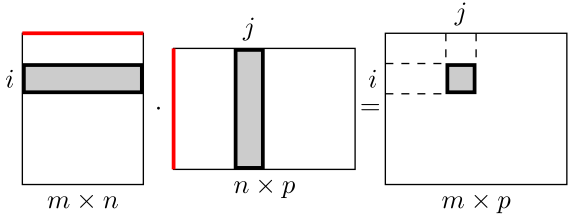


- Potřebujeme zjistit **obrazy vektorů** báze B_U vůči bázi B_W.
- Rozsekáme matici A na sloupečky a zobrazíme je pomocí g – obrazy budou sloupečky matice $B \cdot A$.
- Výsledek odpovídá **maticovému násobení** $B \cdot A$.

- Přesně proto se maticové násobení definuje tak zvláštně, aby odpovídalo skládání zobrazení.
- Zobrazení, která chceme skládat, na sebe musí pasovat!

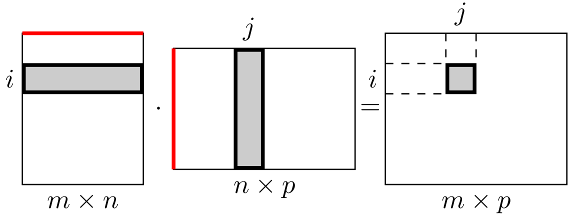
- Skládání zobrazení, a tedy i násobení matic, není komutativní.
- Na druhou stranu skládání je asociativní.

- Přesně proto se maticové násobení definuje tak zvláštně, aby odpovídalo skládání zobrazení.
- Zobrazení, která chceme skládat, na sebe musí pasovat!



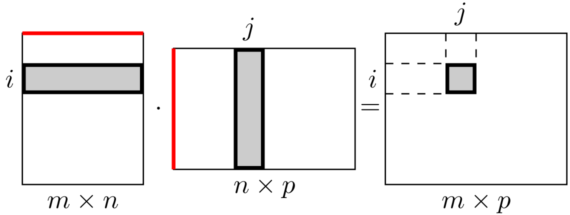
- Skládání zobrazení, a tedy i násobení matic, není komutativní.
- Na druhou stranu skládání je asociativní.

- Přesně proto se maticové násobení definuje tak zvláštně, aby odpovídalo skládání zobrazení.
- Zobrazení, která chceme skládat, na sebe musí pasovat!



- Skládání zobrazení, a tedy i násobení matic, není komutativní.
- Na druhou stranu skládání je asociativní.

- Přesně proto se maticové násobení definuje tak zvláštně, aby odpovídalo skládání zobrazení.
- Zobrazení, která chceme skládat, na sebe musí pasovat!



- Skládání zobrazení, a tedy i násobení matic, není komutativní.
- Na druhou stranu skládání je asociativní.

Otázka

Jak nalézt inverzní zobrazení?

- Nemusí vždycky existovat.
- Jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení.
- Hledání inverzního zobrazení znamená hledat inverzní matici na součin.
- To se dělá pomocí řešení n soustav lineárních rovnic.
- I obdélníkové matice mohou mít jednostranné inverze.

Otázka

Jak nalézt inverzní zobrazení?

- Nemusí vždycky existovat.
- Jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení.
- Hledání inverzního zobrazení znamená hledat inverzní matici na součin.
- To se dělá pomocí řešení n soustav lineárních rovnic.
- I obdélníkové matice mohou mít jednostranné inverze.

Otázka

Jak nalézt inverzní zobrazení?

- Nemusí vždycky existovat.
- Jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení.
- Hledání inverzního zobrazení znamená hledat inverzní matici na součin.
- To se dělá pomocí řešení n soustav lineárních rovnic.
- I obdélníkové matice mohou mít jednostranné inverze.

Otázka

Jak nalézt inverzní zobrazení?

- Nemusí vždycky existovat.
- Jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení.
- Hledání inverzního zobrazení znamená hledat inverzní matici na součin.
- To se dělá pomocí řešení n soustav lineárních rovnic.
- I obdélníkové matice mohou mít jednostranné inverze.

Otázka

Jak nalézt inverzní zobrazení?

- Nemusí vždycky existovat.
- Jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení.
- Hledání inverzního zobrazení znamená hledat inverzní matici na součin.
- To se dělá pomocí řešení n soustav lineárních rovnic.
- I obdélníkové matice mohou mít jednostranné inverze.

Různá geometrická zobrazení:

- Zvětšení.
- Rotace kolem počátku.
- Zkosení.
- Projekce.

Zobrazení však musí zachovávat počátek. Tedy neuděláme:

- Posunutí.
- Rotace kolem libovolného bodu.

Různá geometrická zobrazení:

- Zvětšení.
- Rotace kolem počátku.
- Zkosení.
- Projekce.

Zobrazení však musí zachovávat počátek. Tedy neuděláme:

- Posunutí.
- Rotace kolem libovolného bodu.

Otázka

Jak vypadá matice rotace vůči kanonické bázi?

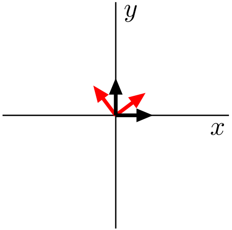
- Potřebujeme spočítat obrazy vektorů báze po otočení.

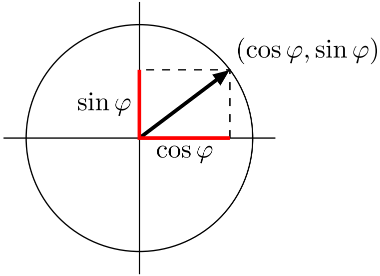
$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos(\varphi+90) \\ \sin\varphi & \sin(\varphi+90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Otázka

Jak vypadá matice rotace vůči kanonické bázi?

- Potřebujeme spočítat obrazy vektorů báze po otočení.



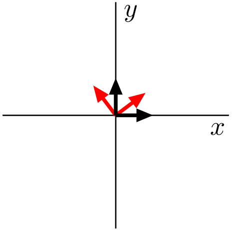


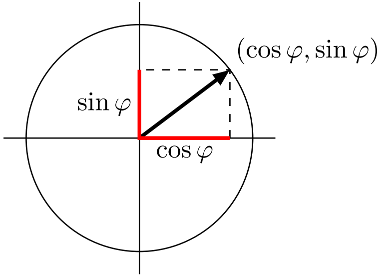
$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos(\varphi+90) \\ \sin\varphi & \sin(\varphi+90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Otázka

Jak vypadá matice rotace vůči kanonické bázi?

- Potřebujeme spočítat obrazy vektorů báze po otočení.





$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos(\varphi+90) \\ \sin\varphi & \sin(\varphi+90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- Vezmeme si prostor všech Fibonacciovských posloupností.
- Uvažujme následující zobrazení pro kanonickou bázi:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Toto zobrazení dělá posun posloupnosti doprava.

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, \ldots) \xrightarrow{M} (1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21).$$

- Tedy

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

- Navíc díky asociativitě dokážeme M^n spočítat v $\mathcal{O}(\log n)$.

- Vezmeme si prostor všech Fibonacciovských posloupností.
- Uvažujme následující zobrazení pro kanonickou bázi:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Toto zobrazení dělá posun posloupnosti doprava.

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, \ldots) \xrightarrow{M} (1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21).$$

- Tedy

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

- Navíc díky asociativitě dokážeme M^n spočítat v $\mathcal{O}(\log n)$.

- Vezmeme si prostor všech Fibonacciovských posloupností.
- Uvažujme následující zobrazení pro kanonickou bázi:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Toto zobrazení dělá posun posloupnosti doprava.

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, \dots) \xrightarrow{M} (1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21).$$

- Tedy

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

- Navíc díky asociativitě dokážeme M^n spočítat v $\mathcal{O}(\log n)$.

- Vezmeme si prostor všech Fibonacciovských posloupností.
- Uvažujme následující zobrazení pro kanonickou bázi:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Toto zobrazení dělá posun posloupnosti doprava.

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, \dots) \xrightarrow{M} (1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 21).$$

- Tedy

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

- Navíc díky asociativitě dokážeme M^n spočítat v $\mathcal{O}(\log n)$.

A nebo trocha analýzy ...

- Derivace a integrál jsou lineární zobrazení.
- Jak vypadají jejich matice na prostoru polynomů omezeného maximálního stupně?
- Uvažujme kanonickou bázi $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}$.
- Například pro $k = 4$ dostaneme tyto dvě matice:

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \int P(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Derivace je levá inverze integrálu, částečně to jsou inverzní zobrazení.

A nebo trocha analýzy ...

- Derivace a integrál jsou lineární zobrazení.
- Jak vypadají jejich matice na prostoru polynomů omezeného maximálního stupně?
- Uvažujme kanonickou bázi $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^k\}$.
- Například pro $k = 4$ dostaneme tyto dvě matice:

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \int P(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Derivace je levá inverze integrálu, částečně to jsou inverzní zobrazení.

A nebo trocha analýzy ...

- Derivace a integrál jsou lineární zobrazení.
- Jak vypadají jejich matice na prostoru polynomů omezeného maximálního stupně?
- Uvažujme kanonickou bázi $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}$.
- Například pro $k = 4$ dostaneme tyto dvě matice:

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \int P(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Derivace je levá inverze integrálu, částečně to jsou inverzní zobrazení.

A nebo trocha analýzy . . .

- Derivace a integrál jsou lineární zobrazení.
- Jak vypadají jejich matice na prostoru polynomů omezeného maximálního stupně?
- Uvažujme kanonickou bázi $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^k\}$.
- Například pro $k = 4$ dostaneme tyto dvě matice:

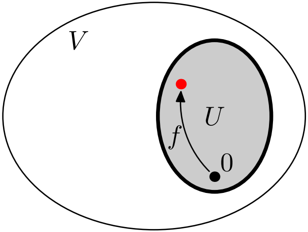
$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \int P(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Derivace je levá inverze integrálu, částečně to jsou inverzní zobrazení.

- Chceme geometrická zobrazení, která nezachovávají počátek.
- Jak upravit lineární zobrazení, aby nemuseli zachovávat počátek?

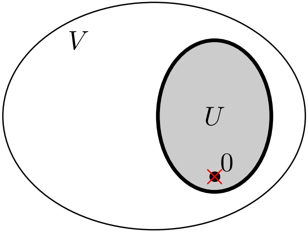
- Tak počátek se v prostoru nebude nacházet.
- Prostor bude affiním podprostorem vektorového prostoru ...

- Chceme geometrická zobrazení, která nezachovávají počátek.
- Jak upravit lineární zobrazení, aby nemuseli zachovávat počátek?



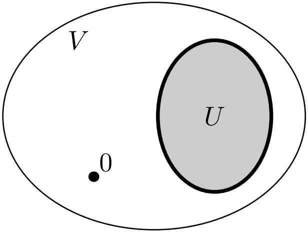
- Tak počátek se v prostoru nebude nacházet.
- Prostor bude affiním podprostorem vektorového prostoru . . .

- Chceme geometrická zobrazení, která nezachovávají počátek.
- Jak upravit lineární zobrazení, aby nemuseli zachovávat počátek?



- Tak počátek se v prostoru nebude nacházet.
- Prostor bude affiním podprostorem vektorového prostoru . . .

- Chceme geometrická zobrazení, která nezachovávají počátek.
- Jak upravit lineární zobrazení, aby nemuseli zachovávat počátek?



- Tak počátek se v prostoru nebude nacházet.
- Prostor bude affiním podprostorem vektorového prostoru . . .

- Affiní podprostor je vektorový podprostor posunutý z počátku.
- Je to množina všech affiních kombinací daných vektorů.

Definice (Affiní kombinace)

Lineární kombinace je affiní, pokud

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Příklad (Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$)

Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$ jsou jednotlivé body, všechny přímky a celý prostor.

- Affiní podprostor je vektorový podprostor posunutý z počátku.
- Je to množina všech affiních kombinací daných vektorů.

Definice (Affiní kombinace)

Lineární kombinace je affiní, pokud

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Příklad (Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$)

Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$ jsou jednotlivé body, všechny přímky a celý prostor.

- Affiní podprostor je vektorový podprostor posunutý z počátku.
- Je to množina všech affiních kombinací daných vektorů.

Definice (Affiní kombinace)

Lineární kombinace je affiní, pokud

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Příklad (Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$)

Affiní podprostory $\mathbb{R}^2$ jsou jednotlivé body, všechny přímky a celý prostor.

- Kernel matice $\mathrm{Ker}(A)$ je množina všech vzorů počátku, tedy všechna řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Věta

Pro každé lineární zobrazení $f : U \to V$ definovaného maticí A tvoří $\mathrm{Ker}(A)$ vektorový podprostor U.

- Podobně pro libovolný vektor $\mathbf{b}$ množina všech řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvoří affiní podprostor.
- Tedy affiní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic.

- Kernel matice $\mathrm{Ker}(A)$ je množina všech vzorů počátku, tedy všechna řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Věta

Pro každé lineární zobrazení $f : U \to V$ definovaného maticí A tvoří $\mathrm{Ker}(A)$ vektorový podprostor U.

- Podobně pro libovolný vektor $\mathbf{b}$ množina všech řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvoří affiní podprostor.
- Tedy affiní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic.

- Kernel matice $\mathrm{Ker}(A)$ je množina všech vzorů počátku, tedy všechna řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Věta

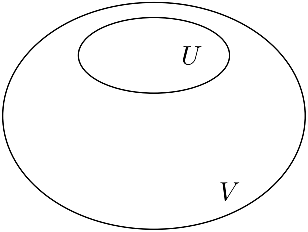
Pro každé lineární zobrazení $f : U \to V$ definovaného maticí A tvoří $\mathrm{Ker}(A)$ vektorový podprostor U.

- Podobně pro libovolný vektor $\mathbf{b}$ množina všech řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvoří affiní podprostor.
- Tedy affiní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic.

- Affiní zobrazení je lineární zobrazení spolu s vektorem posunutí.
- Chceme simulovat tyto zobrazení pomocí lineárních zobrazení ve vektorovém prostoru větší dimenze.

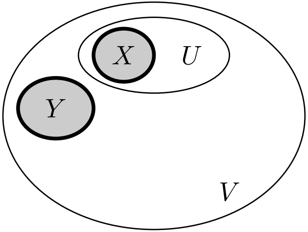
- Nechť X je báze U a Y vektory doplňující X na bázi V.
- Všechny vektory U mají stejné souřadnice vůči Y.
- Myšlenka: lineární zobrazení vytvoříme pomocí X a posunutí vytvoříme pomocí Y.

- Affiní zobrazení je lineární zobrazení spolu s vektorem posunutí.
- Chceme simulovat tyto zobrazení pomocí lineárních zobrazení ve vektorovém prostoru větší dimenze.



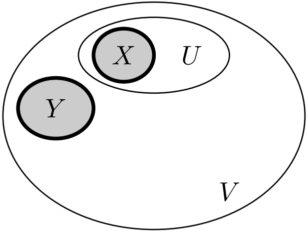
- Nechť X je báze U a Y vektory doplňující X na bázi V.
- Všechny vektory U mají stejné souřadnice vůči Y.
- Myšlenka: lineární zobrazení vytvoříme pomocí X a posunutí vytvoříme pomocí Y.

- Affiní zobrazení je lineární zobrazení spolu s vektorem posunutí.
- Chceme simulovat tyto zobrazení pomocí lineárních zobrazení ve vektorovém prostoru větší dimenze.



- Nechť X je báze U a Y vektory doplňující X na bázi V.
- Všechny vektory U mají stejné souřadnice vůči Y.
- Myšlenka: lineární zobrazení vytvoříme pomocí X a posunutí vytvoříme pomocí Y.

- Affiní zobrazení je lineární zobrazení spolu s vektorem posunutí.
- Chceme simulovat tyto zobrazení pomocí lineárních zobrazení ve vektorovém prostoru větší dimenze.



- Nechť X je báze U a Y vektory doplňující X na bázi V.
- Všechny vektory U mají stejné souřadnice vůči Y.
- Myšlenka: lineární zobrazení vytvoříme pomocí X a posunutí vytvoříme pomocí Y.

A takhle se to dělá prakticky:

- Dimenze V bude o jedna větší než U.
- Afinní zobrazení složené z matice A a vektoru $\mathbf{b}$.
- Každý vektor v affiním podprostoru má souřadnici 1 vůči Y.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A takhle se to dělá prakticky:

- Dimenze V bude o jedna větší než U.
- Afinní zobrazení složené z matice A a vektoru $\mathbf{b}$.
- Každý vektor v affiním podprostoru má souřadnici 1 vůči Y.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A takhle se to dělá prakticky:

- Dimenze V bude o jedna větší než U.
- Afinní zobrazení složené z matice A a vektoru $\mathbf{b}$.
- Každý vektor v affiním podprostoru má souřadnici 1 vůči Y.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A takhle se to dělá prakticky:

- Dimenze V bude o jedna větší než U.
- Afinní zobrazení složené z matice A a vektoru $\mathbf{b}$.
- Každý vektor v affiním podprostoru má souřadnici 1 vůči Y.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definice determinantu:

1. Popíšeme, jak spočítat – Vzoreček se součtem všech permutací:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{i,\pi(i)} zn(\pi).$$

2. Popíšeme vlastnosti – multilineární alternující forma, která je pro jednotkové matice rovna 1.
3. Je roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory matice.

Definice determinantu:

1. Popíšeme, jak spočítat – Vzoreček se součtem všech permutací:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{i,\pi(i)} zn(\pi).$$

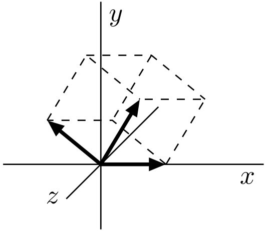
2. Popíšeme vlastnosti – multilineární alternující forma, která je pro jednotkové matice rovna 1.
3. Je roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory matice.

Definice determinantu:

1. Popíšeme, jak spočítat – Vzoreček se součtem všech permutací:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{i,\pi(i)} zn(\pi).$$

2. Popíšeme vlastnosti – multilineární alternující forma, která je pro jednotkové matice rovna 1.
3. Je roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory matice.



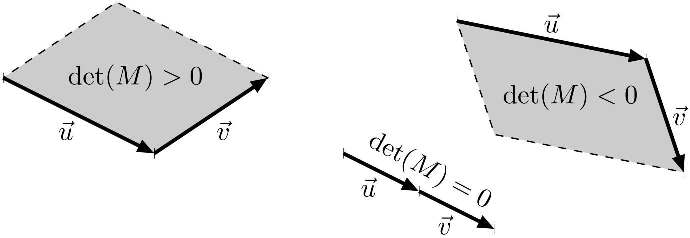
Na co se nám hodí:

- Umožňuje snadno počítat obsahy a objemy.
- Umožňuje snadno určit orientaci úhlu.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \det(M) = x_1 y_2 - x_2 y_2.$$

Na co se nám hodí:

- Umožňuje snadno počítat obsahy a objemy.
- Umožňuje snadno určit orientaci úhlu.



$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \det(M) = x_1 y_2 - x_2 y_2.$$

- Vlastní čísla matice popisují jeho pevné směry a jeho stabilitu.
- Prozradí řadu užitečných informací o matici.
- Jejich výpočet lze provést jenom přibližně numerickými metodami.
- Aplikace: Rychlé umocňování matic, řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, ...

Příklad (Řešení diferenčních a diferencialních rovnic)

Vlastní čísla matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pro výpočet Fibonacciho čísel jsou $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Nepřipomínají vám tato čísla něco?

- Vlastní čísla matice popisují jeho pevné směry a jeho stabilitu.
- Prozradí řadu užitečných informací o matici.
- Jejich výpočet lze provést jenom přibližně numerickými metodami.
- Aplikace: Rychlé umocňování matic, řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, . . .

Příklad (Řešení diferenčních a diferencialních rovnic)

Vlastní čísla matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pro výpočet Fibonacciho čísel jsou $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Nepřipomínají vám tato čísla něco?

- Vlastní čísla matice popisují jeho pevné směry a jeho stabilitu.
- Prozradí řadu užitečných informací o matici.
- Jejich výpočet lze provést jenom přibližně numerickými metodami.
- Aplikace: Rychlé umocňování matic, řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, ...

Příklad (Řešení diferenčních a diferencialních rovnic)

Vlastní čísla matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pro výpočet Fibonacciho čísel jsou $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Nepřipomínají vám tato čísla něco?

- Vlastní čísla matice popisují jeho pevné směry a jeho stabilitu.
- Prozradí řadu užitečných informací o matici.
- Jejich výpočet lze provést jenom přibližně numerickými metodami.
- Aplikace: Rychlé umocňování matic, řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, ...

Příklad (Řešení diferenčních a diferencialních rovnic)

Vlastní čísla matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pro výpočet Fibonacciho čísel jsou $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Nepřipomínají vám tato čísla něco?

Děkuji za pozornost.

Prostor pro Vaše otázky. . .

Další zdroje:

- G. Strang, Linear Algebra and Its Applications
- J. Matoušek, Šestnáct miniatur, `http://kam.mff.cuni.cz/~matousek/la-appls.ps`
- J. Matoušek, Selected Mathematical ‘ and Algorithmic Applications of Linear Algebra, `http://kam.mff.cuni.cz/~kamserie//serie/clanky/2009/s917.ps`