Kombinatorika a grafy I: série 7 – KPR, SRR a jiné TLA

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Mějme bipartitní graf na $2n$ vrcholech takový, že každá partita má velikost n.

a) Dokažte, že pokud minimální stupěn G je alespoň $n/2$, pak G obsahuje perfektní párování. *(2 body)*

b) Stačilo by, kdyby min. stupeň G byl alespoň $n/2 - 1$? *(1 bod)*

Úloha 2. Dokažte, že pro m mocninu dvou lze K_m rozložit na $m - 1$ hranově disjunktních perfektních párování. *(2 body)*

Úloha 3. Mějme lib. logickou formuli, která může obsahovat symboly pro proměnné, konjunce, disjunkce a negace, v tzv. konjunktivně normálním tvaru (CNF). Formule tohoto tvaru se skládá z konjunkcí klauzulí, kde klauzule je disjunkce proměnných resp. jejich negací. Např. $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a)$ je formule v CNF, naproti tomu formule $(a \vee b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b)$ není. Poznamenejme jen na okraj, že každá logická formule lze převést do CNF. Dokažte, že pokud kážda klauzule obsahuje právě tři proměnné resp. jejich negace (jinými slovy, velikost klauzule je tři) a každá proměnná ať už jako negace či jako gace se vyskytuje v právě třech klauzulích, potom vždy existuje přiřazení pravdivostních hodnot proměnným tak, že daná formule bude splněna. Pro ty z Vás, kteří znají SAT, by šlo zadání formulovat jednodušeji: dokažte, že $3, 3-$SAT formule je vždy splnitelná. *(3 body)*

Úloha 4. Dokažte, že přímky libovolné konečné projektivní roviny (KPR) mají systém různých reprezentantů (SRR). *(2 body)*

Úloha 5. Popište všechny systémy, které splňují axiomy (A1) a (A2) konečných projektivních rovin, ale nesplňují (A0). *(2 body)*

Úloha 6. Nalezňete maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 4 a dokažte, že je maximální. *(1 bod)*

Úloha 7. Pro $m \leq n$ definujeme latinský obdélník velikosti $m \times n$ jako obdélníkovou tabulku $m \times n$ vyplněna čísly $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, v jejímž každém řádku a každém sloupci se žádné dvě čísla neopakují. Kolik existuje latinských obdélníku řádu $2 \times n$? *(2 body)*