Kombinatorika a grafy I: série 8 – Ramseyova věta

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Uvažme dostačně velký úplný graf na N (které závisí na k) vrcholech. Ramseyova věta říká, že pro každé přirozené číslo k a pro libovolné obarvení jeho hran pomocí dvou barev existuje úplný jednobarevný podgraf na k vrcholech.

Úloha 1. Rozhodněte, zda platí následující verze Ramseyovy věty:

a) Verze pro orientované grafy, tedy obarvíme hrany úplného orientovaného grafu, kde hrany vedou oběma směry. Existuje úplný jednobarevný orientovaný podgraf velikosti k? *(2 body)*

b) Verze pro úplný graf se smyčkami, každý vrchol má navíc kolem sebe smyčku. Existuje úplný jednobarevný podgraf (spolu se smyčkami) velikosti k? *(2 body)*

c) Platí, že můžeme při libovolném obarvení dostatečně velkého grafu nalézt pro každé dvě různobarevné hrany jednobarevný trojúhelník, který bude jednu z těchto hran obsahovat? *(2 body)*

d) Bude platit analogie Ramseyovy věty, pokud dostatečně velký úplný graf obarvíme dvakrát a chtěli bychom úplný podgraf obarvený v obou barveních jednobarevně (ne nutně stejně)? *(2 body)*

Úloha 2. Uvažme Ramseyovo číslo $R(3, 4)$, tedy velikost nejmenšího N, že v každém úplném grafu na alespoň N vrcholech existuje K_3 obarvený první barvou, nebo existuje K_4 obarvený druhou barvou.

a) Dokažte, že $R(3, 4) > 8$, tedy nalezněte protipříklad na 8 vrcholech. *(3 body)*

b) Dokažte, že $R(3, 4) \leq 9$, tedy dokažte, že již devět vrcholů postačuje. *(3 body)*

Úloha 3. Dokažte, že pro libovolné obarvení úplného grafu na n vrcholech pomocí dvou barev existuje jeho jednobarevná kostra. *(2 body)*