

## Kombinatorika a grafy I: série 3 – vytvořující funkce

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

**Úloha 1.** Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti. Nepoužívejte pro zápis nekonečné řady.

- a)  $(1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 16, \dots)$ , (1 bod)  
b)  $(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots)$ , (2 body)  
c)  $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ , (1 bod)  
d)  $(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{9}{32}, \dots)$ , tedy obecně  $[x^n] = \frac{2n+1}{2^n}$ . (2 body)

**Úloha 2.** Pro každé přirozené číslo  $n$  označme  $l_n$  (resp.  $s_n$ ) počet způsobů, kterými lze zapsat  $n$  jako součet lichého (resp. sudého) počtu přirozených čísel (dva součty lišící se pouze pořadím považujeme za různé).

- a) Nalezněte formule pro  $l_n$  a  $s_n$  v uzavřeném tvaru (třeba pomocí jejich vytvořujících funkcí). (3 body)  
b) Porovnejte hodnoty  $l_n$  a  $s_n$ . (1 bod)

**Úloha 3.** Najděte posloupnosti určené následujícími vytvořujícími funkcemi, napište formuli pro  $n$ -tý člen v uzavřeném tvaru:

a)

$$a(x) = \frac{1+x}{(1-3x)^2},$$

(1 bod)

b)

$$b(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}x^2 - x + 1},$$

(2 body)

c)

$$c(x) = \frac{-11x + 8}{2x^2 - 3x + 1}.$$

(2 body)

**Úloha 4.** Spočítejte následující sumu, najděte formuli pro  $n$ -tý člen v uzavřeném tvaru.

a)

$$s(n) = \sum_{k=1}^n k^3,$$

(3 body)

b)

$$t(n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}.$$

(3 body)

**Úloha 5.** Spočítejte, kolik existuje permutací, které mají právě jedno lokální minimum. Jinými slovy, když uspořádáme prvky  $1, \dots, n$  do řady, potom nalevo od jedničky je posloupnost klesající a napravo naopak rostoucí. Například permutace 43125 takovou vlastnost má, zatímco permutace 23145 nebo 53241 ji nemají. (3 body)

**Úloha 6.** Spočítejte, kolik různých triangulací má pravidelný  $n$ -úhelník. Triangulace lišící se pootočením považujeme za různé. Například pro  $n = 5$  dostáváme pět různých triangulací:



(4 body)