Kombinatorika a grafy I: série 6 – Ramseyova věta

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Ramseyovým číslem $R(k, l)$ označme nejmenší přirozené číslo N takové, že libovolný úplný graf na N vrcholech, jehož hrany jsou obarveny dvěma barvami (třeba červenou a zelenou), buď obsahuje úplný podgraf K_k červené barvy, nebo obsahuje K_l zelené barvy. Ramseyho věta říká, že pro libovolné k a l přirozené takové Ramseyovo číslo $R(k, l)$ existuje.

Větu lze zobecnit i na více barev, budeme tedy uvažovat i podobně definovaná Ramseyova čísla $R(k_1, k_2, \ldots, k_l)$.

Úloha 1. Rozhodněte, zda platí následující verze Ramseyovy věty:

a) Verze pro orientované grafy, tedy obarvíme hrany úplného orientovaného grafu, kde hrany vedou oběma směry. Existuje úplný jednobarevný orientovaný podgraf velikosti k? *(2 body)*

b) Verze pro úplný graf se smyčkami, každý vrchol má navíc kolem sebe smyčku. Existuje úplný jednobarevný podgraf (spolu se smyčkami) velikosti k? *(2 body)*

c) Platí, že můžeme při libovolném obarvení dostatečně velkého grafu nalézt pro každé dvě různobarevné hrany jednobarevný trojúhelník, který bude jednu z těchto hran obsahovat? *(2 body)*

d) Bude platit analogie Ramseyovy věty, pokud dostatečně velký úplný graf obarvíme dvakrát a chtěli bychom úplný podgraf obarvený v obou barveních jednobarevně (ne nutně stejně)? *(2 body)*

Úloha 2. Odhadněte Ramseyovo číslo $R(3, 4)$.

a) Dokažte, že $R(3, 4) > 8$, tedy nalezněte protipříklad na 8 vrcholech. *(3 body)*

b) Dokažte, že $R(3, 4) \leq 9$, tedy dokažte, že již devět vrcholů postačuje. *(3 body)*

Úloha 3. Dokažte, že pro libovolné obarvení úplného grafu na n vrcholech pomocí dvou barev existuje jeho jednobarevná kostra. *(2 body)*

Úloha 4. Uvažme Ramseyova čísla $R(k, l, m)$, tedy barvíme třemi barvami.

a) Dokažte, že $R(k, l, 2) = R(k, l)$. *(1 bod)*

b) Dokažte, že

$$R(k, l, m) \leq \min\Big\{R\big(k, R(l, m)\big), R\big(l, R(k, m)\big), R\big(m, R(k, l)\big)\Big\},$$

tedy speciálně dvojbarevná verze Ramseyovy věta říká, že je číslo $R(k, l, m)$ konečné. *(3 body)*

c) Dokažte pro $k, l, m > 2$, že

$$R(k, l, m) < R(k-1, l, m) + R(k, l-1, m) + R(k, l, m-1).$$

(3 body)

d) S využitím c) dokažte indukcí, že

$$R(k, l, m) \leq \frac{(k + l + m - 3)!}{(k-1)!(l-1)!(m-1)!}.$$

(3 body)

e) S využitím částí a) a c) dokažte, že $R(3, 3, 3) \leq 17$. *(2 body)*

Úloha 5. O čísle řekneme, že má *lichý rozklad*, pokud součet jeho prvočinitelů je lichý. Například 54 má lichý rozklad, protože $54 = 2 \cdot 3^3$ a $2 + 3 + 3 + 3 = 11$ je liché číslo. Dokažte, že pro každé přirozené k existuje N takové, že mezi přirozenými čísly od 1 do N nalezneme k čísel takových, že součet libovolné dvojice z nich má lichý rozklad. *(5 bodů)*

Hint: Obarvěte hrany úplného grafu dvěma barvami podle toho, zda součet daných čísel má lichý rozklad, a použijte Ramseyho větu. Pokud nalezněte úplný podgraf špatné barvy, modifikujte danou k-tici.

Úloha 6. Nechť G je graf barevnosti $\chi(G) = k$ a H je souvislý graf s nejvýše l vrcholy. Dokažte, že lze obarvit hrany $K_{(k-1)(l-1)}$ dvěma barvami, tak aby neobsahoval červený G, ani zelený H jako podgraf.
Hint: Použijte konstrukci ze cvičení. *(3 body)*