První písemka (24.11.2009)

V početních příkladech nezapomeňte **zapsat výsledek**, třeba výsledkem soustavy rovnic není matice v odstupňovaném tvaru a geometrický výsledek by měl mít geometrickou odpověď. Pokud některému z tvrzení nebudete věřit, **zkuste objevit protipříklad** – pokud existuje, nemělo by jeho objevení být obtížné. **Důkazy pište přehledně** a snažte se, aby postup nebyl zřejmý pouze pro vás. Můžete používat všechny věty probrané na přednášce nebo cvičení. Přeji hodně štěstí …

Příklad 1: Nalezněte všechny průniky tří rovin v $\mathbb{R}^3$:

a)

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ x+2y+3z &= 0, \\ 3x+5y+7z &= 2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ x+y+3z &= 0, \\ 3x+5y+7z &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 2: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vyřešte následující maticovou rovnici, navíc výjadřete matice $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{A}^4\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{C}^{-1}.$$

Nečekejte nejhezčí výsledky!

Příklad 3: Nalezněte inverzní matice k následujícím maticicím. Pokud vás nenapadne řešení pro obecné velikosti, zkuste pro velikost 5×5, i za to budou body (a třeba přitom objevíte, jak váš postup zobecnit):

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Nalezněte čtvercové $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ velikosti $n \times n$, které splňují jednotlivé podmínky, případně zdůvodněte, proč neexistují. Pomoci mohou vztahy:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &\leq \operatorname{rank}(\mathbf{A})+\operatorname{rank}(\mathbf{B}), \\ \operatorname{rank}(\mathbf{AB}) &\leq \min\{\operatorname{rank}(\mathbf{A}),\operatorname{rank}(\mathbf{B})\}. \end{aligned}$$

a) Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou regulární, ale $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ není regulární.

b) Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nejsou regulární, ale $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ je regulární.

c) Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou regulární, ale $\mathbf{AB}$ není regulární.

d) Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nejsou regulární, ale $\mathbf{AB}$ je regulární.

Příklad 5: Vyzkoušejte si, jaké je to být v roli cvičícího. Student vám dokázal, že pro matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ (mohou být i obdélníkové!) platí $\mathbf{AB}=\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{BA}=\mathbf{I}$. Tvrzení nevěříte. Objevte v jeho důkazu chybný (neopodstatnění) krok, navíc zkonstruujte protipříklad. Dokázal to takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{A}^T\mathbf{AB} &= \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T, \\ \mathbf{BA} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}), \\ \mathbf{BA} &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Příklad 6: Připadá vám tato písemka obtížná? Proč?