Příklady ke cvičení (13.10.2009)

Příklad 1: Nalezněte všechna řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pro následující matici $\mathbf{A}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 13 & 18 \\ 6 & -9 & 7 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Řešte soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^1$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^2$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^3$ pro:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jak spolu souvisí geometrické interpretace těchto soustav?

Příklad 3: Nalezněte koeficienty následujících polynomů, jestliže znáte body, kterými prochází:

a) Polynom $ax^2 + bx + c = y$ a body $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ a $(1, 4)$.

b) Polynom $ax^2 + bx + c = y$ a body $(-2, -1)$, $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

c) Polynom $ax^2 + bx + c = y$ a body $(4, 3)$, $(3, 4)$ a $(4, 4)$.

d) Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d = y$ a body $(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$ a $(1, 1)$.

e) Polynom $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y$ a body $(-2, 7)$, $(-1, -2)$, $(0, 1)$, $(1, -2)$ a $(2, -5)$.

Příklad 4: Doplňte naznačený řetězec elementárních úprav (tak, aby matice stále vycházela celočíselná):

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 7 & . & . & . \\ -8 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 7 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Příklad 5: Ukažte, že jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \ldots, \alpha x_n + (1-\alpha)x'_n)^T$ pro libovolné reálné číslo α. Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ dané soustavy.

Příklad 6: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 7: Spočtěte součet $\sum_{i=1}^{n} i^k$ pro zadané k, za předpokladu, že tento součet je polynom v n stupně nejvýše $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0.$$

a) Pro $k = 1$, tedy součet $\sum_{i=1}^{n} i^1$.

b) Pro $k = 2$, tedy součet $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

c) Pro $k = 3$, tedy součet $\sum_{i=1}^{n} i^3$.