Příklady ke cvičení (01.12.2009)

Příklad 1: V systému podmnožin množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$ braném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b, d, e\}$,
- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a, c, d\}$, $\mathbf{w} = \{b, c\}$, $\mathbf{x} = \{a, b, d, e\}$ a $\mathbf{y} = \{b, e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a, b, e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad 2: Kolik prvků má aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^4$? Kolik prvků má nějaký nejmenší a nějaký největší vlastní podprostor $\mathbb{Z}_5^4$? Vypište prvky nejmenšího podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$, který obsahuje vektory $(0, 0, 0, 4)^T, (2, 4, 3, 2)^T$ a $(1, 2, 4, 3)^T$.

Příklad 3: Rozhodněte, zdali je struktura $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus, \odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \mod 6$ a $a \odot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} \mod 6$.

Příklad 4: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.

Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Příklad 5: Ukažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ řádu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{K}$ platí, že její jádro $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ je podprostorem $\mathbb{K}^n$. Jádro $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ je množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.