Příklady ke cvičení (15.12.2009)

Příklad 1: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u+v, u+w\}$.

b) $\{u+v, u-v, w\}$.

c) $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$.

d) $\{u+v, u+w, v+w\}$.

e) $\{u-2v+w, 3u+v-2w, 7u+14v-13w\}$.

f) $\{u, v+w\}$.

Příklad 2: Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostorech $\mathbb{R}^4, \mathbb{Z}_3^4$ a $\mathbb{Z}_5^4$. Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

a) $X_1 = \left\{(0,1,2,1)^T, (1,2,0,0)^T, (1,1,2,0)^T, (1,2,1,1)^T\right\}$.

b) $X_2 = \left\{(1,1,2,0)^T, (1,2,1,1)^T, (0,1,2,1)^T, (1,1,0,0)^T\right\}$.

c) $X_3 = \left\{(1,0,2,0)^T, (2,1,0,2)^T, (0,2,2,1)^T, (2,2,1,1)^T\right\}$.

Příklad 3: Nechť V je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

c) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

d) Je-li X závislá, je Y závislá.

e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Příklad 4: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V, pokud je to možné.

a) $M = \left\{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

b) $M = \left\{(1,2,0,7)^T, (2,1,0,14)^T, (0,3,0,0)^T\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

c) $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Příklad 5: Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Příklad 6: V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$
určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

a) $f(x) = x^4 - 1$.

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

d) $f(x) = x^3 + x$.

Příklad 7: V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete souřadnice vektorů

$$u_1 = (2, 2, 9, -5)^T, u_2 = (-7, 2, 9, -8)^T, u_3 = (4, -42, 31, 20)^T$$

vůči uspořádané bázi

$$X = \big((1, -3, 7, 2)^T, (3, 2, 1, -4)^T, (0, -1, 4, -3)^T, (-2, 4, -3, 0)^T\big).$$

Příklad 8: Nechť V je množina reálných symetrických čtvercových matic řádu tři s nulami na hlavní diagonále.

Ukažte, že V tvoří podprostor $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Určete dimenzi prostoru V a sestavte nějakou jeho bázi.

Příklad 9: Ukažte, že pokud je V podprostorem prostoru W konečné dimenze, potom existují báze X prostoru V a báze Y prostoru W takové, že $X \subseteq Y$.

Příklad 10: Dokažte, že jsou-li V a W podprostory konečné dimenze, tak platí

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim\big(\mathcal{L}(V \cup W)\big).$$