

Příklady ke cvičení (05.03.2010)

Příklad 1: Spočítejte derminanty matic

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{d) } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{e) } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{e) } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Příklad 2: Určete determinant matice

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Uvažme libovolnou antisymetrickou matici $\mathbf{M}$ velikosti 3×3 (tedy platí $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$). Ukažte bez výpočtu determinantu, že nezávisle na hodnotách matice je vždy $\det \mathbf{M} = 0$. Platí podobná věc pro antisymetrické matice 4×4 ? Zkuste výsledek zobecnit pro antisymetrické matice libovolné velikosti.

Příklad 4: Spočtěte determinanty Vandermondových matic 3×3 a 4×4 :

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Jak vypadá determinant pro obecnou matici $\mathbf{V}_n$?

Příklad 5: Nalezněte protipříklad pro následující tvrzení:

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

Pro které velikosti matic je toto tvrzení pravdivé?