

Příklady ke cvičení (26.03.2010)

Příklad 1: Spočtěte determinanty tridiagonálních matic $n \times n$:

a) Matice $\mathbf{A}_n$ má na diagonále 2 a pod a nad diagonálou -1 :

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Spočtěte zbylé vlastní číslo λ_4 .

Příklad 5: Nalezněte dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, pro které $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ nemá vlastní čísla rovná součtu vlastních čísel $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a $\mathbf{AB}$ nemá vlastní čísla rovná součinu vlastních čísel $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Platí nějaký podobný vztah o součtu, resp. součinu všech vlastních čísel matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$?