

Příklady ke cvičení (09.04.2010)

Příklad 1: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné a nalezněte jejich diagonální rozklad SDS^{-1} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Rozložte matici X na součin $X = RJR^{-1}$, kde matice R je regulární a matice J je v Jordanově normálním tvaru.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matic $n \times n$.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & p & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Uvažte matice z předchozího příkladu. Existuje vztah mezi rankem matice a počtem nenulových vlastních čísel? Platí něco takového alespoň pro speciální druhy matic?

Příklad 5: Uvažme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$.

- a) Objevte vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}(\alpha)$ pro libovolné α .
- b) Existuje matice $\mathbf{A}$ taková, že pro každé komplexní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je matice $\mathbf{A}(\alpha)$ invertovatelná? A kdybychom uvažovali jenom $\alpha \in \mathbb{R}$?
- c) Dokažte, že každou matici lze vyjádřit jako součet dvou regulárních matic.

Příklad 6: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místním (řekněme tři sta členném) zastupitelstvu?