

Příklady ke cvičení (23.04.2010)

Příklad 1: Několik otázek na vlastní čísla matic sousednosti:

- Jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory pro grafy: cesta P_n , kružnice C_n , úplný bipartitní graf $K_{n,m}$, hvězda s n cípy S_n ?
- Jaké hodnoty mohou mít vlastní čísla libovolného grafu?
- Jak vypadá největší vlastní číslo k -regulárního grafu?
- Jaká vlastní čísla a vektory má disjunktní sloučení dvou grafů G a H ?
- Jaká vlastní čísla kartézského součinu dvou grafů G a H ? Kartézský součin je graf na vrcholech $V(G) \times V(H)$ a hrana vede mezi dvojicemi, kdy v jedné složce jsou prvky totožné a v druhé spojené hranou.

Příklad 2: Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

- a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.
b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.
c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.
d) $\mathbf{x}^T = (1, 1 + i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)

Příklad 3: Určete velikost úhlu mezi hlavní úhlopříčkou krychle a podstavou, mezi podstavou čtyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajících vrcholů a mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou. Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisí?

Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?

Příklad 4: Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$.

Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

Příklad 5: Skalární součin na prostoru funkcí se definuje

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx,$$

což odpovídá “nekonečnému” standardnímu skalárnímu součinu.

Uvažme funkce $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$, pro různé hodnoty $n \in \mathbb{R}$, na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Spočítejte skalární součiny:

$$\langle \sin(nx) | \sin(mx) \rangle, \quad \langle \sin(nx) | \cos(mx) \rangle, \quad \langle \cos(nx) | \cos(mx) \rangle \quad \forall n, m \in \mathbb{R}.$$