

Příklady ke cvičení (30.04.2010)

Příklad 1: Rozhodněte, zdali jsou následující matice pozitivně definitní a případně nalezněte jejich Choleského rozklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Pro která reálná čísla g je matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní?

Příklad 3: Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou pozitivně definitní matice. Ukažte, že také matice $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ jsou pozitivně definitní. Tím zároveň dokažte, že matice $\mathbf{A}$ je regulární.

Příklad 4: Dokažte, že pozitivně definitní matice $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ má determinant nejvýše $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Příklad 5: Ukažte pro pozitivně definitní matice, že zvětšení složky a_{11} také zvětší determinant. Platí podobná věc pro indefinitní matice?