Matematická analýza – cvičení 14.10.2010

Vzorce

Úloha 1. S následujícími výrazy se budeme při studiu analýzy často potkávat. Čemu se rovnají?
a) $x^a \cdot x^b =$
b) $x^{a+b} =$
c) $x^{ab} =$
d) $e^{a+b} =$
e) $\log ab =$
f) $\log(a+b) =$
g) $x^2 - y^2 =$
h) $x^3 - y^3 =$
i) $x^3 + y^3 =$
j) $\sin(x \pm y) =$
k) $\cos(x \pm y) =$

Suprema a infima

Úloha 2. Nalezněte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum. Existuje množina, která má maximum, ale nemá supremum?

Úloha 3. Nalezněte supremum, infimum, maximum a minimum pro následující množiny, pokud existují. Množina $\mathbb{N}$ značí přirozená čísla bez nuly.

$$A_1 = \left\{ \frac{n-1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{n+1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_3 = \left\{ \frac{n}{n+m};\ n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$B_1 = \{\sin x;\ x \in [0, 2\pi]\}, \quad B_2 = \{\sin x;\ x \in (0, 2\pi)\}, \quad B_3 = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}.$$

$$C_1 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}\}, \quad C_2 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}, \quad C_3 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}.$$

$$D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$E_1 = \{5^{3^k};\ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad E_2 = \{5^{3^k(-1)^l};\ k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

$$F_1 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad F_2 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ sudé} \right\}, \quad F_3 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ liché} \right\}.$$

Úloha 4. Nechť A je neprázdná množina, x je její dolní závora ($\forall a \in A, x \leq a$) a y její horní závora ($\forall a \in A, y \geq a$). Dokažte, že $x \leq y$.

Úloha 5. Pro neprázdnou podmnožinu reálných čísel A označme $(-A)$ množinu všech opačných reálných čísel:

$$(-A) = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in A\}.$$

Dokažte, že $\inf A = -\sup(-A)$ a $\sup A = -\inf(-A)$.

Druhé odmocniny

Na závěr uděláme něco zajímavějšího.

Úloha 6. Dokažte, že odmocnina z 12 je iracionální.

Úloha 7. Dokažte pro libovolné přirozené číslo, že odmocnina z něj je buď přirozená, nebo iracionální. *Hint:* Zkusme postupovat podobně jako v důkazu, že odmocnina ze dvou je iracionální, předpokládejme, že je racionální a nalezněme spor.