Matematická analýza – cvičení 20.10.2010

Pro připomenutí: První bonifikační písemka se píše už 19.11.2010!

Limity posloupností – základ

Úloha 1. Co říká definice limity? Spočtěte přímo podle definice limity posloupností:

$$\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}, \qquad \left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

.

Spočtěte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

Úloha 2. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\cos(-1)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^{n!}.$$

Úloha 3. Dokažte, že jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, potom existuje i $\lim_{n\to\infty}|a_n|$. Platí tvrzení naopak?

Věta o aritmetice limit

Pro následující příklady se vám bude hodit věta o aritmetice limit (dále AL). Ta říká, že pro libovolné dvě posloupnosti a_n a b_n platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl,}\\
\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty}a_n - \lim_{n\to\infty}b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl,}\\
\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl,}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}, \quad \text{má-li pravá strana smysl a } b_n\neq 0.
\end{aligned}$$

Často se stává, že pravá strana nemá smysl—vyjde třeba rozdíl $\infty-\infty$, nebo podíl $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. V takových případech je potřeba vhodnou fintou zadaný výraz upravit a aplikovat AL až poté.

Úloha 4. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2-2n}\right)\left(5-\frac{1}{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}.$$

Úloha 5. Nebaví vás počítat limity podílu dvou polynomů pořád dokola? Pojďme si dokázat obecnou větu. Nechť $P(n)$ a $Q(n)$ jsou polynomy v proměnné n. Potom hodnota limity $\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ záleží pouze na stupni polynomů a koeficientech u největší mocniny. Nalezněte tuto závislost.

Úloha 6. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Úloha 7. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right).$$

Hint: Použijte vzorec $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ a $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.

Úloha 8. Dokažte větu o aritmetice limit, nebo alespoň první část. Přestože na přednášce její důkaz brzo uslyšíte, nejlépe se člověk matematiku naučí tak, že ji sám vymyslí.