Matematická analýza – cvičení 7.12.2010

Úloha 1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos k}{2+\cos k}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2 5^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{\log^2 k}.$$

Úloha 2. Připomeňte si, jak funguje kondenzační kriterium. Pomocí něj vyšetřete konvergenci řad s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$. Nezapomeňte vyzkoušet podílové a odmocninové kriterium.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\log^\alpha k}.$$

Úloha 3. S využitím Leibnitzova kriteria vyšetřete konvergenci řad, určete navíc, jestli řady konvergují absolutně:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\log k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot(\sqrt[k]{3}-1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k},\ \text{kde } z\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{10k}{k^2+1}.$$

Úloha 4. S využitím Abel-Dirichletova kriteria vyřešte konvergenci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k)}{k}.$$

Můžete předpokládat, že posloupnost $a_n = \sin(\alpha n)$ má pro každé $\alpha \in R$ omezené částečné součty.

Úloha 5. Existuje posloupnost a_n taková, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k$$

konverguje pro každé $z \in \mathbb{R}$?