Dedekindovy řezy (20 bodů)

V této úloze se pokusíme seznámit se s Dedekindovými řezy, pomocí nichž si zavedeme reálná čísla. Tuto konstrukci vymyslel a publikoval Dedekind v roce 1872. Poznamenejme, že ve stejném roce Cantor publikoval alternativní zavedení reálných čísel jako limit Cauchyovských posloupností.

Samotnou konstrukci neprovedeme do nejmenších detailů, ostatně to formálně zabere několik stránek. Naším cílem bude se seznámit, jak tyto řezy fungují a proč mají vlastnosti, které po reálných čísel požadujeme. Tou nejklíčovější vlastností bude existence suprema každé neprázdné shora omezené množiny.

Na začátku máme uspořádané těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$—tedy sčítání a násobení je komutativní, asociativní, existují inverzní prvky a operace jsou svázané distributivitou, navíc máme definované lineární uspořádání (tedy tranzitivní antisymetrickou relaci). Budeme chtít toto těleso rozšířit, tedy vytvořit těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšiřující $\mathbb{Q}$, které bude splňovat velice silný axiom o supremu. Další veledůležitou vlastností racionálních čísel, kterou budeme potřebovat, je, že jsou husté—mezi každými dvěma racionálními čísly je jedno další. Formálně: Pokud $a, b \in \mathbb{Q}$ a $a < b$, potom existuje $c \in \mathbb{Q}$, že $a < c < b$.

Definice řezu (2 body)

Budeme chtít využít faktu, že reálných čísel je přesně tolik, kolik je podmnožin racionálních čísel. Tedy reálná čísla budeme reprezentovat jako podmnožiny racionálních čísel. Ovšem ne ledajaké podmnožiny, budeme uvažovat pouze podmnožiny, které jsou *řezy.*

Řez α je podmnožina $\mathbb{Q}$, která splňuje tři podmínky:

1) α je neprázdná, rozdílná od $\mathbb{Q}$,
2) pokud $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ a $q < p$, potom i $q \in \alpha$,
3) pokud $p \in \alpha$, potom existuje r, že $p < r$ a $r \in \alpha$.

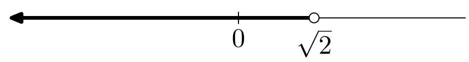
První podmínka říká, že řez je netriviální podmnožina. Druhá říká, že řez obsahuje s každým reálným číslem i všechna menší. Třetí naopak říká, že řez neobsahuje největší racionální číslo.

V dalším textu budeme řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ označovat řezy a normálními písmeny racionální čísla.

Úloha 1. Pro lepší seznámení s řezy dokažte:

1) Pokud $p \in \alpha$ a $q \notin \alpha$, potom $p < q$,
2) Pokud $r \notin \alpha$ a $r < s$, potom i $s \notin \alpha$.

Pan Dedekind nebyl cukrář, a tedy řezy se nejmenují řezy podle cukrárny. Tento název dostaly, neboť odpovídají rozříznutí reálné osy na dvě části. Reálné číslo r je reprezentováno tak, že vezmeme reálnou osu a rozřízneme ji v bodě r na dvě části. Řez reprezentující r jsou potom všechna racionální čísla menší než r. Například řez, který bude reprezentovat $\sqrt{2}$ bude množina všech racionálních čísel q menších než $\sqrt{2}$ (tedy to jsou buď čísla záporná nebo ty, že $q^2 < 2$). Tento řez je naznačen tučně na obrázku.



Budeme muset udělat čtyři věci: Zadefinovat na řezech uspořádání, zadefinovat operaci sčítání, zadefinovat operaci násobení a ukázat, že v sobě obsahují racionální čísla jako podtěleso. Pokud bychom chtěli definici ověřit do všech detailů, museli bychom ukázat, že splňuje všechny axiomy uspořádaného tělesa. Takový důkaz by byl ale moc pracný, a proto ověříme jenom některé axiomy. I tak získáme dobrý náhled do toho, jak řezy fungují, dokázat ostatní vlastnosti by už nebylo obtížné.

Uspořádání na řezech (7 bodů)

Nadefinujeme si na řezech přirozené uspořádání následujícím způsobem. Řezy uspořádáme inkluzí, tedy $\alpha < \beta$, pokud $\alpha \subset \beta$.

Úloha 2. Dokažte, že pro každé dva řezy nastane právě jedna z možností $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ nebo $\alpha > \beta$.

Úloha 3. Dokažte, že je uspořádání tranzitivní: Pro každé tři řezy α, β, γ platí, že $\alpha < \beta$ a $\beta < \gamma$ implikuje $\alpha < \gamma$.

Úloha 4. Ukažte, že platí axiom o supremu. Tedy ukažte, že pro libovolnou neprázdnou shora omezenou podmnožinu řezů M existuje $\sup(M)$, nejmenší horní závora množiny M.

Hint: Uvažte množinu všech horních závor, každá z nich je řez. Definujte $\sup(M)$ jako průnik všech horních závor. Budete muset ukázat, že $\sup(M)$ je řez a že neexistuje žádná menší horní závora.

Sčítání řezů (7 bodů)

Pro dva řezy α a β definujeme sčítání takto:

$$\alpha \oplus \beta = \{x + y \mid x \in \alpha, y \in \beta\}.$$

Pokud chceme něco dokázat o sčítáni řezů, potřebujeme využít vlastností sčítání v racionálních číslech. Jak by se dalo čekat, struktura racionálních čísel se přenese i na řezy.

Úloha 5. Dokažte, že sčítání $\oplus$ je komutativní a asociativní.

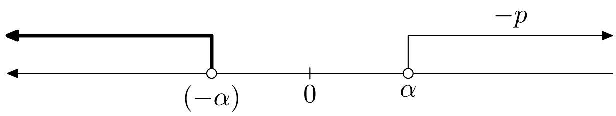
Neutrální prvek 0^* definujeme jako množinu všech záporných racionálních čísel.

Úloha 6. Dokažte, že 0^* je skutečně neutrální prvek vůči operaci $\oplus$, tedy $\alpha \oplus 0^* = \alpha$ pro každý řez α.

Definovat inverzní prvek bude maličko komplikovanější. Nechť α je libovolný řez. Definujme

$$(-\alpha) = \{p \mid p \in \mathbb{Q} \text{ a } \exists r > 0, \text{ že } -r - p \notin \alpha\}.$$

Jinými slovy, p leží v $(-\alpha)$, pokud nějaké racionální číslo menší než $-p$ neleží v α. Následující obrázek ilustruje definici. Množina všech $-p$ z definice odpovídá všem „větším racionálním číslům“ než těm obsažených v řezu α. Množina $(-\alpha)$ obsahuje racionální čísla k nim opačná.



Korektnost definice dokážeme ve dvou krocích:

Úloha 7. Dokažte, že pro každý řez α je množina $(-\alpha)$ řez, tedy splňuje podmínky (1) až (3) z definice řezu.

Úloha 8. Dokažte pro každý řez α, že $(-\alpha)$ je skutečně inverzní prvek ke sčítání, tedy $\alpha + (-\alpha) = 0^*$.

Násobení řezů (2 body)

Definovat násobení je kvůli znaménku maličko složitější než definovat sčítání. Omezíme se proto nejprve jenom na kladné řezy. Nechť $\alpha > 0^*$ a $\beta > 0^*$, potom definujeme

$$\alpha \odot \beta = \{p \mid \exists r \in \alpha, \exists s \in \beta, \text{ že } p < rs\}.$$

Úloha 9. Ukažte, že pro libovolné dva řezy $\alpha > 0^*$ a $\beta > 0^*$ je $\alpha \odot \beta$ řez.

Podobně jako výše, lze snadno ukázat, že násobení splňuje všechny axiomy tělesa. Jako neutrální prvek 1^* se použije množině všech racionálních čísel menších než jedna. Pro $\alpha > 0^*$ se definuje inverzní prvek jako

$$\alpha^{-1} = \left\{p \mid p \leq 0 \text{ nebo } \exists r > 0, \text{ že } \tfrac{1}{p} - r \notin \alpha\right\}.$$

Protože však důkaz by byl hodně podobný výše uvedeným důkazům pro sčítání, detaily si zde odpustíme.

Dodefinovat násobení pro všechny řezy je jednoduché. Pro libovolný řez α je $\alpha \odot 0^* = 0^* \odot \alpha = 0^*$. Dále definujeme

$$\alpha \odot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \odot \beta, & \text{pokud } \alpha < 0^* \text{ a } \beta > 0^*, \\ (-\alpha) \odot (-\beta), & \text{pokud } \alpha < 0^* \text{ a } \beta < 0^*, \\ \alpha \odot (-\beta), & \text{pokud } \alpha > 0^* \text{ a } \beta > 0^*, \\ \alpha \odot \beta, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Inverzní prvky se dodefinují podobně, pro $\alpha < 0^*$ definujeme $\alpha^{-1} = (-((-\alpha)^{-1}))$. Opět vynecháme detaily důkazů, že násobení splňuje axiomy tělesa.

Úloha 10. Ukažte, že pro libovolné dva řezy α a β je $\alpha \odot \beta$ řez.

Tím je odvození téměř dokončeno, víme, že takto sestrojené řezy tvoří uspořádané těleso, které má supremum pro libovolnou neprázdnou shora omezenou množinu.

Vnoření racionálních čísel (2 body)

Zbývá dokázat, že vzniklé těleso obsahuje racionální čísla jako podtěleso. Pro racionální číslo r uvažujme množinu r^* definovanou takto:

$$r^* = \{p \mid p \in \mathbb{Q}, p < r\}.$$

Úloha 11. Pro libovolné racionální číslo r platí, že r^* je řez.

Úloha 12. Sčítání řezů reprezentujících racionální čísla odpovídá sčítání racionálních čísel, tedy pro libovolná dvě racionální čísla r a s je $r^* \oplus s^* = (r+s)^*$.

Podobně lze dokázat, že pro libovolná dvě racionální čísla r a s platí, že $r^* \odot s^* = (rs)^*$ a $r^* < s^*$, právě když $r < s$.