Matematická analýza 2 – cvičení 21.2.2011

Aplikace průběhů funkcí

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

Úloha 1. Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

Úloha 2. Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

Úloha 3. Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

Úloha 4. Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr?
Tip: Použijte Jensenovu nerovnost. Pro konvexní funkci f a čísla α_i, x_i taková, že $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

Úloha 5. Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

Úloha 6. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.
a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$.
b) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$.
c) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$.
d) Ekvivalentně: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$.
e) Pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

Úloha 7. Dokažte, že $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí funkce ($x \in \mathbb{R}^+$).

Taylorův polynom

Taylorův polynom slouží k odhadu funkce pomocí polynomu stupně n. Definuje se pro funkci $f(x)$ v bodě $x = a$ následovně:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Na přednášce si dokážete, že Taylorův polynom je nejlepší aproximace mezi všemi polynomy stupně n.

Pokud počítáme hodnotu funkce f v bodě b pomocí Taylorova polynomu, zajímá nás, jak veliké chyby se dopustíme. Platí, že existuje $x \in [a, b]$ takové, že

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Tedy pokud odhadneme velikost $(n + 1)$-ní derivace, získáme odhad na velikost chyby. Také je vidět, že velikost chyby je ovlivněna vzdáleností b od a.

Úloha 8. Napište Taylorův polynom v nule (stupně např. 5) pro následující funkce:

$$e^x, \qquad \log(1+x), \qquad \sin x, \qquad \cos x, \qquad (1+x)^a.$$

Úloha 9. Spočtěte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla:

$$\sin 0.1, \quad \cos 0.1, \quad \sqrt{0.98}, \quad \sqrt[3]{1279.03}, \quad e^{0.01}, \quad \log 1.2, \quad \log 2, \quad \sqrt[12]{1.03}, \quad 1.01^5.$$

Úloha 10. Dokažte zobecněnou binomickou větu. Nejprve definujme zobecněné kombinační číslo $\binom{r}{k}$ pro $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Zobecněná binomická věta říká, že

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

Navíc dokažte, že tato řada pro každé $r, x \in \mathbb{R}$ konverguje.

Úloha 11. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} \right), \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Úloha 12. Použitím Taylorova polynomu spočtěte přibližně $\sqrt{2}$ (a další dle libosti) a *odhadněte chybu.* Čili určete interval (a,b) co nejmenší délky, v němž dané číslo leží.