

Matematická analýza 2 – cvičení 28.2.2011

Primitivní funkce

Pro funkci $f(x)$ budeme hledat primitivní funkci $F(x)$, tedy takovou funkci, že $F'(x) = f(x)$. Primitivní funkci se často říká *integrál* a značí $\int f(x) dx$. Pokud taková funkce existuje, potom je určena jednoznačně až na konstanty. Další užitečná vlastnost je linearita primitivní funkce. Při integrování nezapomeňte určit interval, na kterém je výsledek platný.

Úloha 1. Nalezněte primitivní funkce k následujícím základním funkcím a určete intervaly, na kterých jsou definované.

$$x^a, \text{ kde } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

Úloha 2. Základní příklady, s použitím výše uvedených funkcí a linearity.

$$\int x^3 + 2x + \frac{1}{7}x dx, \quad \int (x+5)^3 dx, \quad \int \sin(2x+7) dx, \quad \int \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \int \tan^2 x dx,$$
$$\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx, \quad \int \sqrt{x^6} dx, \quad \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

Věta o substituci

Věta o substituci umožňuje řešit komplikovanější integrály. Mějme funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž φ má na (α, β) vlastní derivaci. Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak na intervalu (α, β) platí:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)).$$

Úloha 3. Zopakujte si věty o substituci. S jejich použitím vyřešte:

$$\int \sqrt[3]{1-3x} dx, \quad \int \sin^7 x \cos x dx, \quad \int xe^{-x^2} dx, \quad \int \tan x dx, \quad \int \cotg x dx,$$
$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx, \quad \int \frac{x}{1+x^4} dx, \quad \int \frac{x^2}{\cos x^3} dx, \quad \int \frac{1}{x \ln x} dx, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx.$$

Úloha 4. Nechť $f(x)$ je funkce, která má vlastní derivace na uvažovaném intervalu. Vyřešte obecně:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Úloha 5. Obtížnější příklady na závěr:

$$\int \sin^{2k+1} x dx, \quad \int \cos^{2k+1} x dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos x} dx.$$