Matematická analýza 2 – cvičení 14.3.2011

Metoda per partes

Pamatujete na derivaci součinu? Z ní lze odvodit následující vztah:

Věta. *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu (a,b). Potom na tomto intervalu platí:*

$$\int f \cdot g' \,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g \,\mathrm{d}x.$$

Kdy se takové pravidlo hodí použít? Například pokud můžete počítaný integrál rozdělit na součin dvou funkcí, kdy f se zjednodušuje derivováním a/nebo g' se zjednodušuje integrováním.

Úloha 1. Vypočtěte integrály:

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^k e^x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \arcsin\,\mathrm{d}x, \qquad \int \operatorname{arctg}\,\mathrm{d}x, \qquad \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x, \text{ kde } a,b \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin^n x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^n x\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^m \ln^n x\,\mathrm{d}x, \text{ kde } m,n \in \mathbb{N}.$$

Úloha 2. Dokažte následující překvapivé identity, objevené J. Bernoullim v roce 1697:

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty}(-k)^{-k} \qquad \text{a} \qquad \int_0^1 x^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{-k}.$$

Jak na to? Rozepište si x^x/x^{-x} pomocí Taylorovy řady a integrujte člen po členu.

Základní racionální funkce

Na příštím cvičení se budeme zabývat integrováním racionálních funkcí pomocí rozkladu na parciální zlomky. Zatím se pokusíme vypořádat s základními racionálnimi funkcemi, z kterých poté složíme řešení.

Úloha 3. Nalezněte primitivní funkce k:

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x.$$