Matematická analýza 2 – cvičení 21.3.2011

Integrování racionálních funkcí a rozklad na parciální zlomky

Známe primitivní funkce k následujícím základním racionálním funkcím:

$$\int \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \log|x| & \text{pro } k=1, \\ \frac{1}{-k+1}x^{-k+1} & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \log(1+x^2),$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x = I_k,$$

kde I_k se definuje rekurzivně jako

$$I_1 = \arctan x \qquad \text{a} \qquad I_{k+1} = \frac{x}{2k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k + \frac{2k-1}{2k}I_k.$$

Úloha 1. Nalezněte primitivní funkce k následujícím racionálním funkcím:

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{Ax+B}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,\mathrm{d}x.$$

Z přednášky víte, že platí následují věta.

Věta. (Existence rozkladu na parciální zlomky) *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy a stupeň P je menší jak stupeň Q. Pokud*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+\beta_j x+\alpha_j)^{l_j}$$

(kde trojčleny $x^2+\beta x_j+\alpha j$ jsou nerozložitelné), existuje rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{q=1}^{k_i}\frac{A_{q,i}}{(x-\alpha_i)^q} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{q=1}^{l_j}\frac{C_{q,j}x+D_{q,j}}{(x^2+\beta_j x+\alpha_j)^q}.$$

a reálné koeficienty $A_{p,q}$, $C_{p,q}$ a $D_{p,q}$ jsou určené jednoznačně.

Při hledání primitivní funkce ke $P(x)/Q(x)$ lze tedy použít následující postup:

1) Pokud stupeň P je alespoň tak veliký jako stupeň Q, vydělíme $P(x)/Q(x)$ a dále pracujeme s podílem zbytku.
2) Rozložíme podíl na součet parciálních zlomků, koeficienty nalezneme jako řešení soustavy lineárních rovnic.
3) Zlomky integrujeme zvlášť pomocí výše popsaných vzorců.

Úloha 2. Určete primitivní funkce

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^6-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2+x}{x^6+3x^4+3x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce vedoucí na racionální funkce

Ukážeme si několik základních substitucí, které nám umožní převést počítanou funkci na racionální funkci, které již umíme obecně integrovat. Hojně budeme používat druhou větu o substituci.

K popisování substitucí budeme používat následující značení. Nechť $R(x) = P(x)/Q(x)$. Budeme uvažovat funkce $R(f(x))$, tedy výskyty x nahradíme $f(x)$. Například pro

$$R(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x + 3} \text{ a } f(x) = e^x \qquad \text{dostáváme} \qquad R(e^x) = \frac{(e^x)^2}{(e^x)^3 + 2e^x + 3}.$$

Podobně pro polynomy dvou proměnných uvažujeme racionální funkce $R(x, y)$, například

$$R(x, y) = \frac{x^2 + xy^3 + y^4}{x^2 + xy + y^2}.$$

1) Pro integrály tvaru

$$\int \frac{1}{x} R(\log x) \, \mathrm{d}x$$

volíme přímočarou substituci $y = \log x$.

Úloha 3. Spočtěte

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{\log x + 1}{\log^2 x - 1} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x} \cdot \frac{\log x}{\log^2 x - \log x - 2} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log^2 x - 5 \log + 6} \, \mathrm{d}x.$$

2) Pro integrály tvaru

$$\int R(e^x) \, \mathrm{d}x$$

volíme substituci $y = e^x$.

Úloha 4. Spočtěte

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 2}} \, \mathrm{d}x.$$

3) Pro integrály tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) \mathrm{d}x \qquad \text{volíme substituci} \qquad y = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

Vyjádříme x pomocí y a použijeme druhou větu o substituci.

Úloha 5. Spočtěte

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x + 3}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x - 1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{\frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 2e^x + 1}} \, \mathrm{d}x.$$

4) Pro integrály tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$$

volíme následující Eulerovy substituce. Pokud má $ax^2 + bx + c$ dva různé reálné kořeny, volíme substituci

$$y = \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}.$$

Pro $a > 0$ volíme substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$. Pokud je $c > 0$, můžeme zvolit substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy + \sqrt{c}$. Pokud je $a > 0$ a $c > 0$, můžeme použít libovolnou z nich.

Úloha 6. Spočtěte

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}, \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 4}} \, \mathrm{d}x.$$