Matematická analýza 2 – cvičení 4.4.2011

Substituce trigonometrických funkcích

Pro připomenutí z minula, při řešení integrálů ve tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x)$$

používáme následující substituce:

$$\begin{aligned} R(-u,v) = -R(u,v) &\Longrightarrow y = \cos x, \\ R(u,-v) = -R(u,v) &\Longrightarrow y = \sin x, \\ R(-u,v) = R(u,v) = R(u,-v) &\Longrightarrow y = \tan x, \\ \text{jinak} &\Longrightarrow y = \tan \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

V případě prvních dvou substitucí používáme první větu o substituci, v dalších dvou případech však používáme druhou substituci, proto výsledek dostaneme jenom na intervalech délky π nebo $\frac{\pi}{2}$ a musíme ho dolepit!

Úloha 1. Dopočítejte následující příklady včetně lepení:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 2. Uvědomte si, kterou substituci lze použít a převeďte na integraci racionální funkce:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x},$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad \int \tan^5 x\,\mathrm{d}x, \quad \int \tan^6 x\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3. Pár zajímavějších substitucí:

$$\int \sin \log x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Určitý integrál

Pokud známe primitivní funkci $F(x)$ a je spojitá na intervalu (a,b), potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to (} a+)F(x).$$

Navíc platí obdoby vět pro určité integrály:

Per partes pro určitý integrál:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Substituce pro určitý integrál:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4. Spočtěte

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Plocha pod křivkou

Pokud je křivka daná funkcí, tedy $y = f(x)$ pro $x \in [a,b]$, potom plocha pod ní má obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pokud je křivka dána parametricky $y = f(t)$, $x = g(t)$ pro $t \in [a,b]$, plocha pod touto křivkou je $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Pokud je křivka dána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$ pro $\varphi \in [\alpha,\beta]$, je plocha mezi křivkou a středem souřadnic rovna $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

Úloha 5. Spočtěte obsah
a) obdélníku,
b) trojúhelníku,
c) kruhu,
d) plochy sevřené křivkami $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ a $x = 2$.

Úloha 6. Spočtěte

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Tyto integrály mají význam ve fyzice při zkoumání střídavého proudu.

Délka křivky

Pro křivku danou funkcí, tedy $y = f(x)$ pro $x \in [a,b]$, je její délka rovna

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Proč? Křivku aproximujeme lomenou čarou a její délku počítáme podle Pythagorovy věty. Podobně pro křivku danou parametricky a v polárních souřadnicích dostáváme

$$\int_a^b \sqrt{f^2(t) + g^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{a} \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Úloha 7. Spočtěte
a) obvod kružnice,
b) délku křivky $x^{3/2}$ pro $x \in [0,a]$,
c) délku křivky $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ pro $x \in [1,e]$.

Objem a povrch tělesa vzniklého rotací křivky

Pro těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ pro $x \in [a,b]$ kolem osy x je

$$\text{objem} = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \text{povrch} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 8. Určete objem a povrch
a) válce,
b) kužele,
c) koule,
d) toru,
e) nekonečného trychtýře vzniklého rotací $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1,\infty)$ kolem osy x.

Odhady sum, řad a další

Úloha 9. Zjistěte pomocí integrálního kritéria, zda následující řady konvergují (s parametrem α):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^\alpha k}.$$

Úloha 10. Odhadněte pomocí integrálu $n!$. Zkuste použít logaritmus.

Úloha 11. Spočtěte hodnoty Gamma funkce $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pro $z \in \mathbb{N}$. Tato funkce má řadu překvapivých vlastností, například platí $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.