Matematická analýza 2 – cvičení 18.4.2011

Ukážeme si další aplikace integrálu, snad trochu víc překvapivé než ty na poslední hodině. Pro připomenutí, pro parametricky zadanou křivku $x(\alpha)$ a $y(\alpha)$ na intervalu $[a,b]$ (**druhý vzorec** byl minule špatně):

$$\text{plocha pod křivkou} = \int_a^b y(\alpha)x'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \text{délka křivky} = \int_a^b \sqrt{\big(x'(\alpha)\big)^2 + \big(y'(\alpha)\big)^2}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Podobně pro křivku v polárních souřadnicích $r(\alpha)$ pro $\alpha \in [a,b]$:

$$\text{plocha mezi křivkou a středem} = \int_a^b \frac{1}{2}r^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \text{délka křivky} = \int_a^b \sqrt{\big(r'(\alpha)\big)^2 + r^2(\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Odhady sum, řad a další

Úloha 1. Zjistěte pomocí integrálního kritéria, zda následující řady konvergují (s parametrem α):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^\alpha k}.$$

Úloha 2. Odhadněte $n!$ pomocí integrálu. Zkuste použít logaritmus.

Úloha 3. Spočtěte hodnoty Gamma funkce

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

pro $z \in \mathbb{N}$. Tato funkce má řadu překvapivých vlastností, například platí $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Hezké útvary

Úloha 4. Valíme kruh o poloměru r po přímce a sledujeme jeden bod b na obvodu kruhu. Tento bod určuje křivku, které se říká *cykloida*.

a) Ověřte, že pokud se bod b v čase 0 dotýká přímky, cykloida splňuje rovnice

$$x(\alpha) = r\alpha - r\sin\alpha, \qquad y(\alpha) = r - r\cos\alpha.$$

b) Spočtěte délku jednoho oblouku (pro $\alpha \in [0, 2\pi]$).

c) Spočtěte obsah pod křivkou jednoho oblouku.

Úloha 5. *Astroida* je křivka zadaná rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Tato křivka vznikne podobně jako cykloida, že kruh o poloměru $\frac{1}{4}$ valíme uvnitř kruhu o poloměru 1 a sledujeme dráhu jednoho bodu. Také odpovídá sféře ve „$\frac{2}{3}$-ové metrice“ (není to metrika, protože nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost). Určete délku astroidy a obsah uvnitř.

Úloha 6. *Kardioda (srdcovka)* je druh *epicykloidy.* Epicykloidy jsou křivky, které opíše bod na kružnice, která se valí okolo jiné kružnice. V případě srdcovky jsou obě kružnice stejně velké, o poloměru a. Srdcovky jsou útvary, které se často vyskytují například v Mendelbrotově množině a mohou se objevit ve fyzice při odrazu světla.

a) Ověřte, že v polárních souřadnicích je rovnice srdcovky: $r(\alpha) = a(1 - \sin\alpha)$.

b) Určete plochu uvnitř srdcovky.

c) Určete délku srdcovky.

Guldinova pravidla pro objemy a povrchy

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny M kolem přímky p (neprotínající M) je roven součinu obsahu M a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště M od p.

Plocha rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné křivky ϕ kolem přímky p je rovna součinu délky ϕ a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště ϕ od p.

Úloha 7. Aplikujte pravidla na válec, torus, kužel a kouli.

Úloha 8. Zdůvodněte, proč uvedená pravidla platí.

Funkce více proměnných

Úloha 9. Spočtěte následující limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}.$$

Úloha 10. Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Spojité? Jsou omezené?

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \cos\frac{1}{xy}, \qquad \frac{1}{1-x^2-y^2}, \qquad \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{1}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\sin xy}{|x|+|y|}.$$

Úloha 11. Spočtěte parciální derivace (podle všech proměnných) funkcí

$$x^2+4xy^3+y^5, \qquad x^{y^2}, \qquad (1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m, \qquad \log(1+x)\log(1+y), \qquad (1+x)^{1+y}.$$

Úloha 12. Prověřte rovnost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pro

$$f_1(x,y) = x^2+4xy^3+y^5, \qquad f_2(x,y) = x^{y^2}.$$