Matematická analýza 2 – cvičení 2.5.2011

Budeme se zabývat funkcemi více proměnných. Ty tvoří paralelu k analýze prvního semestru. Na druhou stranu řada problémů (třeba nalezení extrémů) je mnohem složitějších.

Limity a spojitost

Jak se definuje limita funkcí více proměnných? Jak se definuje spojitost?

Úloha 1. Spočtěte následující limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,5)} x^5+4x^3y+y^2+2xy+3, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(2,4)} \frac{y^2-2xy}{y-2x}.$$

Úloha 2. Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Spojité? Jsou omezené?

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \cos\frac{1}{xy}, \qquad \frac{1}{1-x^2-y^2}, \qquad \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{1}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\sin xy}{|x|+|y|}.$$

Parciální derivace

Jak se definují parciální derivace?

Úloha 3. Spočtěte parciální derivace (podle všech proměnných) funkcí

$$x^2+4xy^3+y^5, \qquad x^{y^2}, \qquad (1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m, \qquad \log(1+x)\log(1+y), \qquad (1+x)^{1+y}.$$

Úloha 4. Prověřte rovnost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

pro

$$f_1(x,y)=x^2+4xy^3+y^5, \qquad f_2(x,y)=x^{y^2}.$$

Gradient a totální differenciál

Co je to gradient a co je to totální differenciál? Jaký mají geometrický význam?

Úloha 5. Nalezněte gradient a totální differenciál v bodě $(0,0)$:

$$(1+x)^k(1+y)^l(1+z)^m, \qquad \log(1+x)\log(1+y), \qquad (1+x)^{1+y}.$$

Lokální a globální extrémy

Jak souvisí lokální a globální extrémy s gradientem?

Úloha 6. Nalezněte lokální a globální extrémy funkcí:

$$f_1(x,y)=x^2+(y-1)^2, \qquad f_2(x,y)=x^2-(y-1)^2, \qquad f_3(x,y)=x^3+(y-1)^3,$$

$$f_4(x,y)=(x-y+1)^2, \qquad f_5(x,y)=(x-y+1)^3, \qquad f_6(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2,$$

$$f_7(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}, x,y>0, \qquad f_8(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$f_9(x,y)=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, a^2+b^2+c^2=0, \qquad f_{10}(x,y)=y^2+y\cos x-\sin x-2,$$

$$f_{11}(x,y)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z), x,y,z\in[0,\pi].$$