

Diskrétní matematika: série 1 – Logické úločky

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené * jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Vyřešte následující úlohy o překonávání řeky. Cílem je dostat všechny aktéry na druhou stranu.

- a) Farmář se vrací z (trochu podivného) trhu, kde koupil hlávku zelí, kozu a vlka. Aby se dostal domů, musí přeplout na druhou stranu řeky. Má loďku, do které se vejde jenom s jednou věcí. Problém je, že pokud vlk zůstane s kozou bez dozoru, sežere ji. Podobně koza, pokud by ji farmář nechal se zelím o samotě, zelí sežere.¹ Nalezněte způsob, jak farmář může řeku překonat a všechny věci dovézt na druhou stranu. (1 bod)
- b) Na břehu řeky stojí tři misionáři a tři kanibalové. Mají dvoumístnou loďku. Aby se předešlo tragédii, nesmí mít v žádnou chvíli kanibalové početní převahu—pokud by na libovolné straně řeky bylo více kanibalů než misionářů, nedopadlo by to s misionáři dobře. Nalezněte způsob, jak mohou řeku bezpečně překonat. (2 body)
- * c) Na břehu řeky stojí rodina (tatínek, maminka, dva synové a dvě dcery), policista a zločinec. Mají dvoumístný vor. Navíc platí následující omezení:
- Vor smí řídit jenom tatínek, maminka nebo policista.
 - Zločinec nesmí zůstat sám (bez policisty) s libovolným z členů rodiny.
 - Maminka nesmí zůstat s libovolným ze synů bez tatínka.
 - Podobně tatínek nesmí zůstat s libovolnou z dcer bez maminky.

Nalezněte způsob, jak mohou všichni překonat řeku.² (4 body)

Úloha 2. Farmář chová své stádo ve stájích pro 500 koní (tedy má nejvýše 500 koní). Když je nechá postavit do dvouřadu, trojřadu, čtyřřadu, pětiřadu i šesti řadu, vždycky mu jeden zbude. Postaví-li je však do sedmiřadu, jsou rozestaveni správně. Kolik má farmář koní? Je těmito podmínkami určen jejich počet jednoznačně? (2 body)

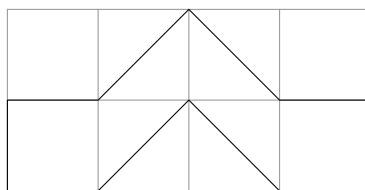
Úloha 3. V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odletěla pryč. Protože má poraněnou plovací blánu, nemůže z hladiny jezera vzlétnout—musí nejprve doplat na břeh. Tam na ni ale číhá kočka. Ta se sice bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí než kačenka plave. Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout (tedy dostat se na kraj rybníka, aniž by tam byla kočka), ať se kočka pohybuje jakkoliv chytře?³

Například: Pokud by se kačenka rozhodla hned plavat na druhý konec jezírka než stojí kočka, utěct by nedokázala (protože $\pi < 4$). (4 body)

Úloha 4. Nechali jste si vyrobit 10 pytlů s mincemi. Máte podezření, že vás zlatník okradl a místo některých pytlů plný pravých mincí vám podstrčil pytle plné falešných. Pravá mince váží 1 g. Falešná mince obsahuje méně kovu a váží pouze 0.9 g. Máte digitální váhy. Dokážete na jedno vážení zjistit, které pytle obsahují falešné mince?

- a) Pokud navíc víte, že jenom jeden pytel obsahuje falešné mince. (1 bod)
- b) Pokud libovolně mnoho pytlů může obsahovat falešné mince. (2 body)

Úloha 5. Rozdělte následující obrazec na sedm shodných částí? Vrcholy jsou v celočíselných bodech, jak je naznačeno na obrázku.



Na této úloze si můžete vyzkoušet svoji schopnost nacházet jednoduchá leč skrytá řešení. (2 body)

¹ Naštěstí pro farmáře není požíráni zacyklené, tedy neplatí, že by zelí sežralo vlka!

² Pokud vám zde již nestačí představivost, můžete použít japonskou flashovou aplikaci, informace naleznete na webu cvičení: <http://pavel.klavik.cz/vyuka/dm.html>.

³ Jinými slovy o pohybu kočky nemůžete činit žádné další předpoklady.