Diskrétní matematika: série 2 – Množiny a matematická indukce

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Nechť A a B jsou množiny. Dokažte:

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, této vlastnosti se někdy říká modularita. *(1 bod)*

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$. *(2 body)*

Úloha 2. Množina 2^A (potence množiny A, někdy též $\mathcal{P}(A)$) je množina všech podmnožin A.

a) Nechť A je množina a a je její libovolný prvek. Dokažte:

$$2^A = \{X : X \subseteq A\} = \{Y : Y \subseteq A \setminus \{a\}\} \cup \{Z \cup \{a\} : Z \subseteq A \setminus \{a\}\}.$$

(2 body)

b) Nechť A a B jsou dvě libovolné množiny. Dokažte, že $A = B$, právě když $2^A = 2^B$. *(2 body)*

Úloha 3. Dokažte že platí

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots n)^2.$$

(2 body)

Úloha 4. Odvoďte vzorce pro součet řad.

a) Nalezněte vzorec pro n-té čtverečkové číslo:

$$\square_n := \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Pokud se vám vzorec nepodaří odvodit, zkuste si ho někde dohledat (nebo mi napište mailem) a dokázat správnost matematickou indukcí, pochopitelně za méně bodů. *(2+2 body)*

b) Pro libovolná dvě reálná čísla a a b sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + \cdots + a^{n-1} b^1 + a^n b^0.$$

(3 body)

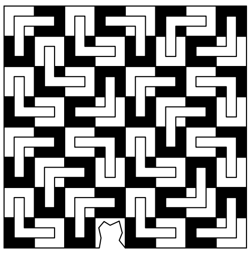
Úloha 5. Trocha kombinatorické geometrie:

a) Mějme n přímek v rovině tak, že žádné tři neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné.[1] Dokažte, že počet částí, na které tyto přímky rozdělují rovinu, je $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{1}{2}n(n-1) + n + 1$. *(2 body)*

$\star$ b) Podobně uvažte n rovin v prostoru (opět v obecné poloze, tedy každé tři roviny se protínají právě v jednom bodě). Dokažte, že rozdělují prostor na $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ částí. *(5 bodů)*

$\star$ c) Obecně v k-rozměrném prostoru platí, že n $(k-1)$-rozměrných podprostorů v obecné poloze (ty se někdy označují podivným českým názvem *nadrovina*, v angličtině *hyperplane*) rozdělují prostor na $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ částí. Dokažte toto tvrzení.
Hint: Bude potřeba použít indukci nejenom podle n, ale i podle k. *(5 bodů)*

Úloha 6. Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno políčko. Dokažte, že zbytek šachovnice lze vyplnit L-ky, které zabírají tři políčka. Příklad pro šachovnici 8×8:



(4 body)

[1] Takové poloze se někdy říká obecná.