Diskrétní matematika: série 4 – Zobrazení a ekvivalence

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Kolik existuje zobrazení z $X \to X$, kde $|X| = 5$? *(1 bod)*

Úloha 2. Uvažme funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované: $f(n) = 2n$ a $g(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Rozhodněte, zda jsou tyto funkce prosté a na. Jak vypadají $f \circ g$ a $g \circ f$? *(3 body)*

Úloha 3. Nechť X je konečná množina. Dokažte, že libovolné zobrazení $f : X \to X$ je prosté, právě když je na. *(2 body)*

Úloha 4. Identita je funkce $\mathrm{id} : X \to X$ taková, že pro každé $x \in X$ je $\mathrm{id}(x) = x$. Nechť $f : X \to X$ je libovolná funkce.

a) Dokažte, že existuje funkce $g : X \to X$ taková, že $g \circ f = \mathrm{id}$, právě když f je prostá. *(2 body)*
b) Dokažte, že existuje funkce $g : X \to X$ taková, že $f \circ g = \mathrm{id}$, právě když f je na. *(2 body)*

Úloha 5. Nalezněte zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na, ale není prosté. *(2 body)*

Úloha 6$\star$. Na cvičení jsme si ukazovali příklad neidentického zobrazení $f : X \to X$, že $f \circ f = f$. Popište všechny taková zobrazení. *(5 bodů)*

Úloha 7. Relace R na množině X je antisymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí

$$(x, y) \in R \land (y, x) \in R \Longrightarrow x = y.$$

Dokažte, že $R \cap R^{-1} = \Delta_X$ (diagonální relace $\{(x, x) \mid x \in X\}$), právě když R je reflexivní a antisymetrická. *(3 body)*

Úloha 8. Dokažte, že antireflexivní tranzitivní relace je antisymetrická. Antireflexivní znamená, že neexistuje x takové, že (x, x) leží v relaci. *(2 body)*

Úloha 9. Kolik je ekvivalencí na pěti prvcích? *(2 body)*

Úloha 10. Uvažme následující dvě relace S a P na množině všech trojúhelníků v rovině. Pro dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$ definujeme, že $(\triangle ABC, \triangle DEF) \in S$, právě když jsou trojúhelníky shodné, a $(ABC, DEF) \in P$, právě když jsou podobné. Jsou tyto relace ekvivalence? *(2 body)*

Úloha 11$\star$. Mějme libovolnou relaci R na konečné množině X. Řekneme, že y je v R dosažitelné z x, pokud existuje posloupnost $a_0, a_1, \ldots, a_n$ prvků z X, že $(a_i, a_{i+1}) \in R$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots n-1\}$, $a_0 = x$ a $a_n = y$. Jinými slovy, x je dosažitelné z y, pokud existuje v grafu relace cestička z x do y. Definujme relace

$$\to_R = \big\{(x, y) \mid x, y \in X, y \text{ je v } R \text{ dosažitelné z } x\big\} \text{ a}$$
$$\leftrightarrow_R = \big\{(x, y) \mid x, y \in X, y \text{ je v } R \text{ dosažitelné z } x \text{ nebo } x \text{ je v } R \text{ dosažitelné z } y\big\}.$$

a) Dokažte, že pokud je relace R symetrická, potom jsou relace $\to_R$ a $\leftrightarrow_R$ stejné. *(2 body)*
b) Rozhodně, zda jsou relace $\to_R$ a $\leftrightarrow_R$ ekvivalence, nezávisle na tom, jak vypadá R a X. Pokud nejsou, určete, zda jsou reflexivní, symetrické a tranzitivní. *(3 body)*

Úloha 12. Uvažme relace na množině X. Na cvičení jsme si ukázali, že skládání relací není komutativní, tedy existují relace R a S, že $R \circ S \neq S \circ R$. V této úloze se budeme zabývat relacemi, které při skládání komutují se vším, tedy relacemi R takovými, že pro každou relaci S platí $R \circ S = S \circ R$.

a) Dokažte, že diagonála $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ a prázdná relace $\emptyset_X = \{\emptyset\}$ komutují s každou relací na množině X. *(2 body)*
b) Dokažte, že pokud existují $x, y \in X$, $x \neq y$, že $(x, y) \in R$, existuje relace S, se kterou relace R nekomutuje. *(2 body)*
$\star$ c) Dokažte, že diagonála a prázdná relace jsou jediné dvě relace, které komutují se vším. *(3 body)*