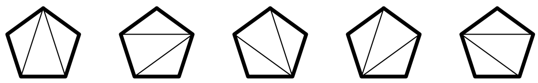
Diskrétní matematika: série 6 – Počítání a princip inkluze a exkluze

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Kolik existuje podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$, které neobsahují žádná dvě po sobě jdoucí přirozená čísla. *(3 body)*

Úloha 2. Spočítejte, kolik různých triangulací má pravidelný n-úhelník.[1] Triangulace lišící se pootočením považujeme za různé. Například pro $n = 5$ dostáváme pět různých triangulací:



(4 body)

Úloha 3. V automatu stojí káva přesně 1 Kč.[2] Přijímá jednokorunové a dvoukorunové mince. Pokud zákazník vhodí 2 Kč, automat se mu pokusí jednu korunu ze zásobníku vrátit. Pokud tam ale žádná není, automat se zasekne a musí přijít technik ho opravit. Automat má na začátku prázdný zásobník. S jakou pravděpodobností se nezasekne, jestliže ho navštíví v náhodném pořadí n zákazníku s 1 Kč a m zákazníků s 2 Kč?[3] *(4 body)*

Úloha 4. Kolik čísel zbude, vyškrtáme-li z množiny $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ všechny násobky 2, 3, 5 a 7? *(3 body)*

Úloha 5. Karetní balíček obsahuje 52 karet čtyř různých barev, 13 karet od každé barvy.

a) Kolika způsoby lze vybrat 13 karet tak, aby mezi nimi byly karty všech barev, jestliže na pořadí vybraných karet nezáleží? *(2 body)*

b) Kolik je výběrů, jestliže požadavky jsou stejné jako v a), jen na pořadí karet záleží? *(2 body)*

Úloha 6. Kolika různými způsoby lze ke kulatému stolu posadit r Rusů, g Germánů a b Bulharů tak, aby příslušníci žádného národa netvořili souvislý úsek? Předpokládejte, že všichni jsou navzájem rozlišitelní, naopak rozsazení lišící se pouze pootočením stolu považujeme za stejná. *(5 body)*

Úloha 7$\star$. Na n-místném kolotoči jelo n dětí. Děti chtějí jet ještě jednou, ale žádné z nich nechce sedět za stejným dítětem jako při první jízdě. Kolika různými způsoby je můžete posadit na kolotoč tak, abyste vyhověli jejich přání? Výsledek nemusíte upravovat. *(3 body)*

Úloha 8. Kolik existují permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které jsou involuce? Involuce je permutace π, která je sama svojí inverzí, tedy $\pi \circ \pi = \mathrm{id}$. To jsou přesně takové permutace, že mají všechny cykly délky jedna nebo dva. *(4 body)*

Úloha 9. Nechť $\check{s}(n)$ označuje funkci šatnářky, tedy počet permutací $\{1, 2, \ldots, n\}$ bez pevného bodu. Dokažte, že vždy platí:

$$\check{s}(n) = (n-1)\big(\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2)\big).$$

(3 body)

Úloha 10. Mějme dvě přirozená čísla k a l.

a) Volme k a l náhodně rovnoměrně z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Vypočtěte pravděpodobnost $p(n)$, že čísla k a l budou nesoudělná. *(3 body)*

$\star$ b) Nahlédněte, že

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \prod_{p \text{ prvočíslo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Poznamenejme, že hodnota tohoto součinu vychází překvapivě $\frac{6}{\pi^2}$. *(5 bodů)*

---

[1] Triangulace odpovídá rozdělení n-úhelník úhlopříčkami na $n-2$ trojúhelníků.

[2] Pokud vám tohle přijde jako až moc zázračná cena, můžete si místo korun představovat třeba \$.

[3] Pokud se vám nelíbí slovíčko pravděpodobnost, spočítejte počet uspořádání zákazníků, při kterých se nezasekne. Jednotlivé zákazníky mající stejný obnos můžete považovat za nerozlišitelné.