Diskrétní matematika: série 7 – částečná a lineární uspořádání

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Úlohy označené $\star$ jsou obtížnější a můžete je řešit do konce semestru.

Úloha 1. Nakreslete Hasseův diagram množiny
a) $[20] = \{1, 2, \ldots, 20\}$ uspořádané dělitelností a *(1 bod)*
b) $X = \{2^k 3^l : k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$ uspořádané dělitelností (všechna čísla dělitelná pouze 2 a 3). *(2 body)*

Úloha 2. Mějme Hasseův diagram pro přirozená čísla $\mathbb{N}$ uspořádaná dělitelností. Určete, jaký počet čar vede zespodu do čísla k. Jinými slovy, kolik má číslo k předchůdců v uspořádání dělitelností. *(2 body)*

Úloha 3. Pro $\varepsilon > 0$ definujeme relaci R_ε na reálných čísel tak, že $(x, y) \in R_\varepsilon$, pokud pokud x a y jsou skoro stejná, formálně pokud $|x - y| < \varepsilon$. Zadefinujme relaci $\ll$ na $\mathbb{R}$ tak, že $x \ll y$, pokud x a y nejsou skoro stejná a zároveň $x < y$. Ukažte, že $\ll$ je ostré částečné uspořádání $\mathbb{R}$, tedy relace na $\mathbb{R}$, která je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní. *(3 body)*

Úloha 4. Mějme částečné uspořádání $\leq$ množiny X. Definujme řetězec jako posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z X taková, že $x_i \leq x_{i+1}$ pro všechna i. Jaká je délka maximálního řetězce následujících uspořádání:
a) $X = 2^{[n]}$, tedy všechny podmnožiny $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, a jsou uspořádány inkluzí, tedy $x \leq y$, právě když $x \subseteq y$. *(1 bod)*
b) $X = [n]$ a jsou uspořádány dělitelností, tedy $x \leq y$, právě když $x \mid y$. *(2 body)*

Úloha 5. Mějme relaci R na množině X, která je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí být antisymetrická.[1] Definujme ekvivalenci ρ na X, že $(x, y) \in \rho$, právě když $(x, y) \in R$ a zároveň $(y, x) \in R$. Definujme relaci R_ρ na třídách ekvivalence ρ tak, že $(a, b) \in R_\rho$, právě když existují $x \in a$ a $y \in b$, že $(x, y) \in R$.
a) Dokažte, že pokud takové $x \in a$ a $y \in b$ existují, potom dokonce pro každou volbu $x \in a$ a $y \in b$ platí $(x, y) \in R$. *(2 body)*
b) Dokažte, že R_ρ je částečné uspořádání.[2] *(2 body)*

Úloha 6. Uvažme všechna lineární uspořádání na množině X. Dvě uspořádání R a S jsou izomorfní, pokud jsou stejné až na přejmenování prvků.
a) Dokažte pro $X = [n]$, že libovolná dvě lineární uspořádání jsou izomorfní. *(2 body)*
b) Nalezněte dvě neizomorfní lineární uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(2 body)*
c) Nalezněte spočetně mnoho po dvou neizomorfních lineárních uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(2 body)*
$\star$ d) Rozhodněte, zde existuje dokonce nespočetně mnoho po dvou neizomorfních lineárních uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(3 body)*

$\star$ **Úloha 7.** Každé částečné uspořádání R na množině X lze napsat jako průnik lineárních uspořádání $L_1, L_2, \ldots, L_k$ na X (pro nějaké dostatečně velké k).
a) Dokažte, že pokud X je konečná, k je také konečné. Poznamenejme, že nejmenšímu k se říká *Dushnik-Millerova dimenze* částečného uspořádání. *(5 bodů)*
b) Odbočka stranou: Nechť R je uspořádání na množině X. Dokažte, že i R^{-1} je uspořádání na množině X. Takovému uspořádání se někdy říká *opačné uspořádání*. *(1 bod)*
c) Mějme dvě uspořádání R a R' na množině X, že každá dvojice x a y, kde $x \neq y$, je nějak uspořádaná jedním uspořádáním a neporovnatelná v druhém.[3] Dokažte, že Dushnik-Millerova dimenze R je nejvýše dva, tedy existují lineární uspořádání L_1 a L_2 na X, že $R = L_1 \cap L_2$. *(3 body)*

---

[1] Takové relaci se někdy říká *předuspořádání*.

[2] Poznamenejme, že pojem předuspořádání je v matematice důležitý. Ekvivalence ρ říká, které prvky jsou z hlediska uspořádání ekvivalentní, chovají se stejně. V relaci R_ρ potom všechny tyto prvky sloučíme do jednoho reprezentanta. Představme si například uspořádání racionálních čísel ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$. To není uspořádání, neboť například $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. V relaci ρ budou jednotlivé třídy ekvivalence tvořeny stejnými zápisy daného racionálního čísla pomocí různých zlomků. V relaci $\leq_\rho$ bude každé racionální číslo reprezentované jediným prvkem a bude to klasické lineární uspořádání racionálních čísel, které dobře známe.

[3] Formálně: $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, platí, že právě jedna z velikostí $|\{(x, y), (y, x)\} \cap R|$ a $|\{(x, y), (y, x)\} \cap R'|$ je rovna jedné a právě jedna je rovna nule.