

# Diagram průběhu rekurence

Průběh rekurentně zadané posloupnosti

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$$

s počátky  $a_1 = 0.5$  a  $a_1 = 1.25$ . Jako několik prvních členů dostáváme zhruba:

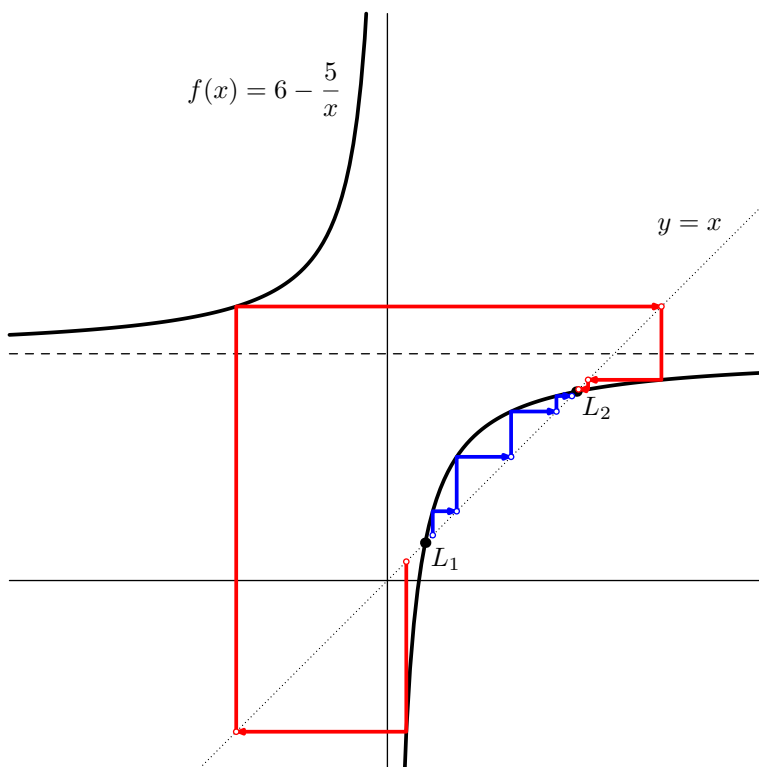
$$a_1 = 0.5, a_2 = -4, a_3 = 7.25, a_4 \approx 5.31034, a_5 \approx 5.05844, \dots$$

$$a_1 = 1.25, a_2 = 2, a_3 = 3.5, a_4 \approx 4.57143, a_5 \approx 4.90625, \dots$$

V obou případech je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ , situace je naznačena na diagramu rekurence.

Diagram rekurence obsahuje dvě vyznačené křivky  $f(x) = 6 - \frac{5}{x}$  a  $y = x$ . V jejich průniku jsou možní kandidáti na limity  $L_1 = 1$  a  $L_2 = 5$ . Jednu aplikaci rekurence lze graficky reprezentovat následovně:

- Hodnotu  $a_n$  vyznačíme na přímce  $y = x$  jako bod  $(a_n, a_n)$ .
- Spojíme tuto hodnotu svisle s křivkou  $f(x)$ , do bodu  $(a_n, f(a_n))$ .
- Spojíme tento bod vodorovně s  $y = x$ . To přiřadí nový bod  $(a_{n+1}, a_{n+1}) = (f(a_n), f(a_n))$  na přímce  $y = x$ .



Poznamenejme, že z tohoto diagramu lze vyčíst mnohé o chování rekurence. Například můžeme snadno dokázat, že pro libovolné  $a_1 \in \mathbb{R}$  je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$  s výjimkou jediné hodnoty  $a_1 = 1$ . Umí se také spočítat přesně tvar pro  $n$ -tý člen

$$a_n = \frac{20(a_1 - 5)}{(a_1 - 1)5^n - 5(a_1 - 5)} + 5,$$

její správnost můžete zkusit dokázat indukcí.