1 Číselné systémy

Úloha 1. Jaké číselné systémy znáte? Jaké základní vlastnosti splňují?

Úloha 2. Rozhodněte, zda existuje nekonečná klesající posloupnost v systémech $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}_+$.

2 Logika

Tohle byste už měli umět. Netýká se to přímo analýzy, ale matematiky obecně. Pokud máte s takovými úkoly problémy, zkuste navštěvovat předmět *Matematické dovednosti*.

Úloha 3. Dokažte, že pro libovolné výroky A, B jsou následující výroky ekvivalentní.

- $A \implies B$,
- $\neg B \implies \neg A$,
- $\neg A \vee B$,
- $\neg(A \wedge \neg B)$.

Připomeňte si napřed pravdivostní tabulky logických spojek (nebo se zeptejte, pokud nevíte oč jde). Rozmyslete si a dobře zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit!

Úloha 4. Řekněte bez použití „implikace“:

a) Nebude-li pršet, nezmoknem.
b) Kdo se bude snažit, dostane zápočet.
c) Kdo získá dost bodů z písemky, dostane zápočet.
d) Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten nedostane zápočet.

Úloha 5. Znegujte výroky:

a) Když prší, nevycházím z domu.
b) Nebude-li pršet, nezmoknem.
c) Zmokneme, právě když bude pršet.
d) Když prší, nevycházím z domu.

Úloha 6. Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte:

a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
b) Každé prvočíslo je liché.
c) Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.
d) Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

3 Důkazy a matematická indukce

Úloha 7. Dokažte, že následující dvě definice *rostoucí posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou ekvivalentní:

- Platí $a_m < a_n$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m < n$.
- Platí $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 8. Dokažte správnost těchto součtů:

a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,
b) $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$,
c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
d) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Zkuste objevit důkazy nevyužívající indukci.

Úloha 9. Fermatovo n-té číslo je definováno jako $F_n = 2^{2^n} + 1$, tedy několik prvních z nich je: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, $\ldots$. Dokažte pro ně následující rekurentní vztah:

$$F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Úloha 10. Pro $n \geq 4$ platí $2^n \geq n^2$, zkuste to i bez indukce, možná až pro trochu větší n. *Nápověda.* Využijte binomickou větu.

Úloha 11. Podobně, také bez indukce, dokažte: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (pro $x > 0$) a $(1+x)^n \gg n^k$ (pro $x > 0$, k přirozené, a pro dostatečně velká n).

4 Funkce

Úloha 12. Nakreslete grafy následujících funkcí, navíc určete vlastnosti jako parita či perioda:

a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x + \pi)$, $\cos(2x + \pi)$, $2\cos x + 1$,
b) $\big||x-1|-1\big|$, $\big||x-1|-1\big|^2$, $\big||x-1|^2-1\big|$,
c) $\sin|x|$, $|\sin x|$,
d) (skládání funkcí – grafy kreslete jenom zhruba!) $\sin(x^2)$, $(\sin x)^2$, $\sin 1/x$, $\ln\sin x$, $\ln\ln\sin x$,
e) $\sqrt{1-x^2}$,
f) $\sin x \cdot \cos x$,
g) $x + 1/x$.

Úloha 13. Nalezněte následující funkce:

a) Funkce, která zobrazují interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$ a na interval $(-\infty, \infty)$.
b) Funkci, která zobrazuje interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$.

Úloha 14. Funkce f je zadána předpisem:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}}.$$

Určete definiční obor D_f, inverzní funkci f^{-1} a obor hodnot H_f.

5 Úpravy výrazů

Úloha 15. Vyřešte v oboru reálných čísel:

a) $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{x^2+x-6}$,
b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 1$ (*Nápověda:* použijte substituci),
c) $\big||x-2|-3\big| = 5$.

Úloha 16 (AG-nerovnost)**.** Pro kladná reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

a) Dokažte pro $n = 2$ a zapamatujte si pro všechna přirozená n.
b) Můžete vyzkoušet dokázat pro obecné n.

Nápověda. V obecném důkazu se využívá netypická indukce z $n \to 2n$ a $n \to n-1$. Bude se hodit tvrzení pro $n = 2$.

Úloha 17 (Trojúhelníková nerovnost)**.** Buďte $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $|x+y| \leq |x| + |y|$.