

1 Vzorce

Úloha 1. S následujícími výrazy se budeme při studiu analýzy často potkávat. Čemu se rovnají?

- a) $x^a \cdot x^b =$
- b) $x^{a+b} =$
- c) $x^{ab} =$
- d) $e^{a+b} =$
- e) $\log(ab) =$
- f) $\log(a + b) =$
- g) $x^2 - y^2 =$
- h) $x^3 - y^3 =$
- i) $x^3 + y^3 =$
- j) $\sin(x \pm y) =$
- k) $\cos(x \pm y) =$

2 Čtení výroků

Úloha 2. Rozhodněte, zda platí následující výroky, nebo jejich negace:

- a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0,$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n,$
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : (x \geq n) \wedge (x < n + 1),$
- d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (|x - 2| < \delta \implies |x - 3| < \varepsilon).$

Úloha 3. Vyhovuje funkce daná předpisem $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x > K \implies |f(x)| < \varepsilon$$

Úloha 4. Který z následujících výroků je silnější?

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists K > 0 : |f(x+1) - f(x)| \leq K, \quad \text{nebo} \quad \exists K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |f(x+1) - f(x)| \leq K?$$

Říkáme, že výrok A je silnější než výrok B , pokud z platnosti A můžeme usoudit, že také platí B .

3 Aritmetika okolí

Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $A \in \mathbb{R}$. Potom $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$ značí otevřený interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, který se nazývá ε -okolí A .

Úloha 5. Dokažte, že $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(A)$, právě když $|A - x| \leq \varepsilon$. Jaký vztah platí mezi x a y , pokud $x, y \in \mathcal{B}_\varepsilon(A)$?

Úloha 6. Nechť $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(A)$ a $y \in \mathcal{B}_\varepsilon(B)$. Co platí pro $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ a $\frac{1}{x}$?