1 Suprema a infima

Úloha 1. Nalezněte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum. Existuje množina, která má maximum, ale nemá supremum?

Úloha 2. Nalezněte supremum, infimum, maximum a minimum pro následující množiny, pokud existují. Množina $\mathbb{N}$ značí přirozená čísla bez nuly.

a)
$$A_1 = \left\{ \frac{n-1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{n+1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_3 = \left\{ \frac{n}{n+m};\ n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

b)
$$B_1 = \big\{ \sin x;\ x \in [0, 2\pi] \big\}, \quad B_2 = \big\{ \sin x;\ x \in (0, 2\pi) \big\}, \quad B_3 = \big\{ \sin x;\ x \in (0, \pi) \big\}.$$

c)
$$C_1 = \big\{ n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N} \big\}, \quad C_2 = \big\{ n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n > m \big\},$$
$$C_3 = \big\{ n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \big\}.$$

d)
$$D_1 = \big\{ 2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N} \big\}, \qquad D_2 = \big\{ 2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z} \big\}.$$

e)
$$E_1 = \big\{ 5^{3^k};\ k \in \mathbb{Z} \big\}, \qquad E_2 = \big\{ 5^{3^k (-1)^l};\ k, l \in \mathbb{Z} \big\}.$$

f)
$$F_1 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad F_2 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ sudé} \right\},$$
$$F_3 = \left\{ \cos \frac{n+1}{n}\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ liché} \right\}.$$

Úloha 3. Nechť A je neprázdná množina, x je její dolní závora ($\forall a \in A, x \leq a$) a y její horní závora ($\forall a \in A, y \geq a$). Dokažte, že $x \leq y$.

Úloha 4. Pro neprázdnou podmnožinu reálných čísel A označme $(-A)$ množinu všech opačných reálných čísel:
$$(-A) = \{ x \in \mathbb{R};\ -x \in A \}.$$
Rozhodněte, jak vypadá $\sup(-A)$ a $\inf(-A)$.

Úloha 5. Dokažte následující větu. Mějme nekonečnou posloupnost neprázdných vnořených intervalů
$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots .$$
Tedy nechť $I_k = [a_k, b_k]$, pak platí $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. Dokažte, že $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ je neprázdný interval I a určete, jak vypadá. Platí tato věta i na množině racionálních čísel?