1 Věta o aritmetice limit

Pro následující příklady se vám bude hodit věta o aritmetice limit (dále AL). Ta říká, že pro libovolné dvě posloupnosti a_n a b_n platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl.}\\
\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl.}\\
\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \text{má-li pravá strana smysl.}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{má-li pravá strana smysl a } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.
\end{aligned}$$

Často se stane, že pravá strana nemá smysl—vyjde třeba rozdíl $\infty - \infty$, nebo podíl $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; v takových případech AL neříká *o hodnotě limity vůbec nic*! Je potřeba vhodnou fintou zadaný výraz upravit a aplikovat AL až poté.

Úloha 1. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2-2n}\right)\left(5-\frac{1}{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}.$$

Úloha 2. Nebaví vás počítat limity podílu dvou polynomů pořád dokola? Pojďme na to vymyslet obecnou větu. Nechť $P(n)$ a $Q(n)$ jsou polynomy v proměnné n. Jak hodnota limity $\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ závisí na stupních polynomů a jejich koeficientech?

Úloha 3. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Úloha 4. Spočtěte, není potřeba přesně vyčíslovat:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^{20}\cdot(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Úloha 5. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n.$$

Nápověda. Použijte vzorec $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

Úloha 6. Pro daný polynom $P(n)$ nalezněte co nejlepší konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$, pro které platí $c_1\cdot n^k \le P(n) \le c_2\cdot n^k$ pro dostatečně velké hodnoty n.

Úloha 7. Dokažte větu o aritmetice limit, nebo alespoň první část. Přestože jste důkaz viděli na přednášce, nejlépe se člověk matematiku naučí tak, že ji sám vymyslí.

Nápověda. Vzpomeňte si na aritmetiku okolí, kterou jsme před časem odvozovali na cvičení.

Úloha 8. Předpokládejme, že platí $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; ostatně to je jedna z možných definic éčka. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$