# 1 Věta o policajtech

**Úloha 1.** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti. Nechť navíc platí, že $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.[1] Pokud $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, co to říká o $\lim_{n\to\infty} a_n$? Co říká věta o policajtech?

**Úloha 2.** Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \text{ kde } a \geq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} nq^n, \text{ kde } q > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1}{b^n + b^{n-1} + \cdots + b + 1}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R},\ |a|, |b| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n + \gamma^n}, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

**Úloha 3.** Mějme reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ a $\beta_1, \ldots, \beta_k$ splňující $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > 0$ a $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k > 0$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_k^n}{\beta_1^n + \beta_2^n + \cdots + \beta_k^n}.$$

# 2 Odhady faktoriálu

Funkce faktoriál se definuje následujícím rekurzivním vztahem:

$$0! = 1, \qquad n! = n \cdot (n-1)!, \qquad \text{tedy } n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Pokusíme se srovnat, jak rychle roste $n!$ ve srovnání s dalšími funkcemi.

**Úloha 4.** Dokažte, že platí $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$.

Výše uvedené odhady nejsou nic extra, ale v mnoha případech budou stačit. V případě potřeby lze použít přesnější odhady

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

které vyplývají ze vztahu $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k$. Jako perličku poznamenejme, že existuje velice přesná Stirlingova aproximace

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = S_n,$$

pro kterou platí, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{S_n} = 1$.

**Úloha 5.** Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(3n)!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}.$$

[1] Formálně: Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n \leq b_n$.

## 3 Rekurentně zadané limity

Zkusíme vyřešit limity, pro které neznáme přesně jejich členy, známe pouze rekurentní vztah, který z jedné hodnoty $a_n$ vypočítá následující hodnotu $a_{n+1}$. Nejprve je potřeba určit, zda limita existuje; stačí třeba dokázat, že posloupnost je monotonní a omezená (ve správné kombinaci). Potom označíme neznámou limitu $L$ a dosadíme ji do rekurentního vztahu za $a_n$ a $a_{n+1}$. Dostaneme rovnici pro $L$, která nám dává kandidáty na možnou limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$. Zkuste si rozmyslet, proč tento postup funguje!

**Úloha 6.** Nalezněte limity rekurentně zadaných posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ až $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nezapomeňte si rozmyslet, zda limity vůbec existují!

a) $a_1 = 10 \quad \text{a} \quad a_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{a_n},$

b) $b_1 = \sqrt{2} \quad \text{a} \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n},$

c) $c_1 = t$, kde $t > 0 \quad \text{a} \quad c_{n+1} = \dfrac{c_n + \frac{2}{c_n}}{2},$

d) $d_1 = 1 \quad \text{a} \quad d_{n+1} = \dfrac{1}{1 + d_n},$

e) $e_1 = t$, kde $t \in [1, \infty) \quad \text{a} \quad e_{n+1} = \dfrac{5e_n - 3}{e_n + 1},$

f) $f_1 = \sqrt{2} \quad \text{a} \quad f_{n+1} = \sqrt{2 - f_n},$

g) $g_1 = 0, \quad \text{a} \quad g_{n+1} = g_n + \dfrac{(x - g_n)^2}{2},$ kde $0 \le x \le 1$,

h) $h_1 = 0.4 \quad \text{a} \quad h_{n+1} = 4h_n \cdot (1 - h_n).$