

1 Limity funkcí obecně

Úloha 1. Jaká je definice limity funkce v bodě a ? Jaká je definice spojitosti v bodě a ? Jaký je vztah mezi limitou a spojitostí?

Při počítání limit bychom měli postupovat podobně jako u limit posloupností. Nejprve tam zkusit dosadit, pokud dostaneme určitý výraz a je funkce v daném bodě spojitá (to většinou bude), máme výsledek. V případě neurčitého výrazu postupujeme podobně jako u limit posloupností, potřebujeme výraz zjednodušit (s využitím aritmetiky limit, věty o limitě složené funkce, věty o policajtech, ...).

Většina rozumných funkcí, které známe, je spojitých v každém bodě definičního oboru, například to splňují funkce

$$x^n, \quad \sqrt[n]{x}, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad e^x, \quad \log x.$$

Nespojité funkce jsou obecně dost divné.

Úloha 2. Dokažte, že Dirichletova funkce (charakteristická funkce \mathbb{Q})

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

je nespojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Následující limity jsou důležité a budeme je často používat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

2 Limity podílu polynomů

Úloha 3. Spočtete:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 14}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 7x + 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^3 - 7x}, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}. \end{aligned}$$

Úloha 4. Spočtete limity v závislosti na parametrech:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \text{ kde } n, m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}.$$

Úloha 5. Chytrou úpravou vypočtete:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Úloha 6. Zjistete, kde jsou následující funkce definované:

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^2 + 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x}.$$

Je možné funkce f a g v ostatních bodech spojitě dodefinovat?