

1 Otevřené a uzavřené množiny

Úloha 1. Jaká je definice otevřené a uzavřené množiny? Co je to vnitřek a hranice množiny? Jak se definuje uzávěr množiny?

Úloha 2. Jak vypadají uzavřené a otevřené množiny v metrickém prostoru indukovaném váženým grafem?

Úloha 3. Dokažte, že doplněk otevřené množiny je množina uzavřená. Jak vypadají průniky a sjednocení otevřených a uzavřených množin?

2 Kompaktnost

Pamatujete na větu, že každá uzavřená a omezená posloupnost má vybranou konvergentní podposloupnost? Zkusíme si tuto větu zobecnit na metrické prostory. Pochopitelně každá posloupnost tuto vlastnost nemá, a hezké množiny X , na kterých tato vlastnost platí, nazýváme *kompaktní*. Budeme o nich chtít co nejvíc zjistit.

Úloha 4. Dokažte, že následující tři definice kompaktnosti množiny X je ekvivalentní:

- Pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z X existuje vybraná konvergentní podposloupnost s limitou v X .
- Pro každé otevřené pokrytí existuje konečné podpokrytí. Tedy pokud je X rovno sjednocení libovolně mnoha otevřených množin, potom lze vybrat konečně mnoho z nich, jejichž sjednocení je X , a tedy zbytek z těchto množin je nadbytečný.
- Libovolná spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá minima a maxima.

Úloha 5. Dokažte Heine-Borelovu větu, že podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Úloha 6. Je n -rozměrná sféra

$$S_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

kompaktní množina? A co nekonečně-rozměrná sféra S_{∞} ?

3 Funkce více proměnných

Úloha 7. Spočítejte následující limity

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y}.$$

Úloha 8. Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Spojité? Jsou omezené?

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \cos \frac{1}{xy}, \quad \frac{1}{1 - x^2 - y^2}, \quad \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{(x - y)^2}, \quad \frac{\sin xy}{|x| + |y|}.$$

Úloha 9. Spočítejte parciální derivace (podle všech proměnných) funkcí

$$x^2 + 4xy^3 + y^5, \quad x^{y^2}, \quad (1 + x)^k (1 + y)^\ell (1 + z)^m, \quad \log(1 + x) \log(1 + y), \quad (1 + x)^{1+y}.$$

Úloha 10. Proveďte rovnost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pro

$$f_1(x, y) = x^2 + 4xy^3 + y^5, \quad f_2(x, y) = x^{y^2}.$$