

1 Gradient a totální diferenciál

Co je to gradient a co je to totální diferenciál? Jaký mají geometrický význam? Za jakých podmínek existují?

Úloha 1. Nalezněte gradient a totální diferenciál v bodě $(0, 0)$:

$$(1+x)^k(1+y)^l(1+z)^m, \quad \log(1+x)\log(1+y), \quad (1+x)^{1+y}.$$

2 Lokální a globální extrémy

Jak souvisí existence extrémů s gradientem?

Úloha 2. Nalezněte lokální a globální extrémy funkcí:

a) $f_1(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

b) $f_2(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$.

c) $f_3(x, y) = x^3 + (y - 1)^3$.

d) $f_4(x, y) = (x - y + 1)^2$.

e) $f_5(x, y) = (x - y + 1)^3$.

f) $f_6(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

g) $f_7(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, kde $x, y > 0$.

h) $f_8(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

i) $f_9(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

j) $f_{10}(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2$.

k) $f_{11}(x, y) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, kde $x, y, z \in [0, \pi]$.