4 Mocniny Jordanovy matice (20 bodů)

Jordanova matice je *bloková diagonální matice* složená z čtvercových bloků umístěných podél diagonály, které se nazývají *Jordanovy buňky*. Jordanova buňka J_λ je matice, která má na diagonále hodnotu λ, nad diagonálou proužek jedniček a zbytek matice je nulový, příklad Jordanovy buňky 5×5 je na obrázku vlevo. Jordanova matice je složena z bloků umístěných na diagonálu, a každý blok je jedna Jordanova buňka. Příklad Jordanovy matice je na obrázku vpravo.

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & J_{\lambda_3} & \\ & & & J_{\lambda_4} \end{pmatrix}$$

Jordanova věta je jeden z fundamentálních výsledků lineární algebry a říká následující:

Věta (Jordanova normální forma)**.** *Pro každou čtvercovou matici A existuje regulární matice S a Jordanova matice J, že*

$$A = SJS^{-1}.$$

Například pro matici A pro výpočet Fibonacciho čísel z prvního úkolu (či konce kapitoly 3.1 textu Povídání o lineární algebře) dostáváme následující na první pohled odpudivou Jordanovu normální formu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = SJS^{-1}.$$

Je velice užitečné umět pro matici A spočítat její k-tou mocninu A^k, s tím jsme se už setkali v prvním úkolu pro výše uvedenou A. Přesně v takové situaci se hodí Jordanova věta, která umožňuje A^k přesně určit. Platí totiž:

$$A^k = SJS^{-1}SJS^{1-} \cdots SJS^{-1} = SJ^nS^{-1}.$$

Tedy v případě k-té mocniny stačí umocňovat pouze Jordanovu matici. Například můžete zkusit z výše uvedeného rozkladu vyvodit vzorec pro k-té Fibonacciho číslo

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Cílem této úlohy je zjistit, jak vypadá k-tá mocnina Jordanovy matice. To lze samozřejmě spočítat přímo z definice maticového násobení, i když postup je to trochu pracný. Ukážeme si trikový výpočet založený na binomické větě. Pro začátek jedna ze základních vlastností blokových diagonálních matic:

Úloha 4.1. Předpokládejme, že umíme umocňovat Jordanovy buňky, tedy známe J_λ^k. Určete J^k v závislosti na J_λ^k.

4.1 Binomická věta

Binomická věta z kombinatoriky je následující identita, která platí pro všechna reálná čísla a a b a přirozená čísla k:

$$(a+b)^k = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n}a^nb^0.$$

Přesně v této podobě však binomická věta pro matice fungovat nemůže, totiž například:

$$(A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Protože součin matic obecně nekomutuje, neplatí obecně rovnost $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Pokud se však $AB = BA$, binomická věta platí. Speciálně jsme ukázali na cvičeních, že αI_n komutuje s libovolnou maticí A.

Úloha 4.2. Čemu se rovná $(A + \alpha I_n)^k$?

4.2 Mocnina Jordanovy buňky

Zbývá vyřešit, jak vypadá k-tá mocnina Jordanovy buňky J_λ^k. To uděláme ve dvou krocích:

Úloha 4.3. Jak vypadá k-tá mocnina J_0^k?

Nápověda. Tady stačí postupovat z definice násobení, ale výsledek vyjde velice hezky.

Úloha 4.4. Jak vypadá k-tá mocnina J_λ^k?

Nápověda. Využijte binomickou větu.

5 Matice s vzorem šachovnice (25 bodů)

Na cvičení jsme dokázali, že třídy $\mathcal{U}$ horních trojúhelníkových matic, $\mathcal{L}$ dolních trojúhelníkových matic a $\mathcal{D}$ diagonálních matic jsou uzavřené na sčítání, násobení a inverze (pochopitelně pouze pokud inverze existují). Tedy například pro $A, B \in \mathcal{U}$ platí $A + B \in \mathcal{U}$, $AB \in \mathcal{U}$ a $A^{-1} \in \mathcal{U}$, pokud operace dávají smysl.

V této úloze chceme zjistit, jestli něco podobného platí pro dvě třídy matic $\check{\mathcal{S}}_\ell$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ se šachovnicovým vzorem. Nejprve definujme tyto třídy. Čtvercová matice A patří do $\check{\mathcal{S}}_\ell$, právě když $(A)_{i,j} = 0$, kdykoliv $i + j$ je liché. Podobně čtvercová matice B patří do $\check{\mathcal{S}}_s$, právě když $(B)_{i,j} = 0$, kdykoliv $i + j$ je sudé. Na ostatní políčka matic neklademe žádné předpoklady, tedy například nulová matice patří do obou tříd.

Příklad. Několik příkladů těchto matic (s vynechanými nulami mimo šachovnicový vzor):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 5 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & 3 & & 17 \\ 0 & & \frac{1}{2} & \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix}}_{\in \check{\mathcal{S}}_\ell} \quad \text{a} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ & 0 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 4 & & 0 \\ 4 & & 2 & \\ & 2 & & 7 \\ 0 & & 7 & \end{pmatrix}}_{\in \check{\mathcal{S}}_s}.$$

Úloha 5.1. Rozhodněte, zda jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_\ell$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na součet.

Úloha 5.2. Rozhodněte, zda jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_\ell$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na součin? Jsou součiny matic z těchto tříd v nějakém dalším vztahu; třeba pro AB, pokud $A \in \check{\mathcal{S}}_\ell$ a $B \in \check{\mathcal{S}}_s$?

Úloha 5.3. Rozhodněte, zda jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_\ell$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na inverze (opět s předpokladem, že pro A inverzní matice A^{-1} existuje)? Lze pro některé rozměry s jistotou říct, že matice není invertovatelná?

Nápověda. Inverze se počítá pomocí Gaussovy eliminace, která převede tvar $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$. Nelze nějak vhodně využít vlastností šachovnicového vzoru?