3 Determinant je multilineární alternující forma (40 bodů)

Těmito slovy by vám algebraik pravděpodobně popsal determinant. Definice je na jednu stranu krátká a jednoduchá, na druhou stranu člověku neznalému těchto pojmů neřekne absolutně nic. Naším cílem v této úloze bude si tuto definici představit a ukázat ekvivalenci s typickou definicí determinantu pomocí formule

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}. \tag{$\clubsuit$}$$

Z formule vyvodíme (s trochou práce) vlastnosti determinantu, pomocí kterých ho můžeme spočítat. Na druhou stranu vůbec není vidět, kde se tato formule vzala a proč zrovna takhle je zajímavá; což bude mnohem zřejmější z algebraického přístupu pomocí multilineárních forem.

Jednotlivé vlastnosti si proto budeme ilustrovat na maticích 2×2, kde můžeme snadno zkontrolovat, že je determinant definovaný ($\clubsuit$) splňuje:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3.1 Definice determinantu pomocí vlastností

Zkusíme determinant nadefinovat pomocí vlastností, které splňuje. Pro jednoduchost budeme pracovat nad tělesem reálných čísel.[1] Determinant det je libovolné zobrazení

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R},$$

které splňuje následující tři vlastnosti. Tedy determinant přiřazuje čtvercovým maticím reálná čísla. Formálně máme jednu definici determinantu pro každou velikost čtvercové matice, což budeme ignorovat. Tři vlastnosti jsou tyto:

(1) Determinant je lineárně závislý na prvním řádku matice:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \gamma \cdot a & \gamma \cdot b \\ c & d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Tedy násobky řádků můžeme z determinantu vytknout a podobně můžeme rozdělením řádku rozdělit jeden determinant na součet dvou determinantů. Pozor, rozhodně z toho nevyplývá, že $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$, můžeme aplikovat pouze na jeden řádek naráz. Této vlastnosti se říká *linearita prvního řádku* a drobnou úpravou (1) na (1') dostaneme slibovanou *multilinearitu*.

(2) Determinant je *alternující*; prohození dvou řádků matice změní znaménko determinantu.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(3) Determinant jednotkové matice $\det(I_n)$ je roven jedné.

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \dots$$

Podle vlastností (1) a (2) je determinant překvapivě určený jednoznačně až na přeškálování. Poslední vlastnost fixuje hodnotu determinantu nějaké matice.

[1] Definici determinantu lze samozřejmě zobecnit i pro ostatní tělesa. Jediný rozdíl je, že nad tělesem charakteristiky dva (např. $\mathbb{Z}_2$) se uvažuje místo vlastnosti (2) vlastnost (4).

V případě našeho odvození se ukazují dvě potíže algebraického přístupu. Předně ani nevíme, jestli existuje nějaké funkce splňující vlastnosti (1) až (3) (což víme podle znalosti formule (♣), kterou však nebudeme chtít používat). Také zatím nevíme, zda je determinant určený jednoznačně.

3.2 Odvození dalších vlastností

Začneme tím, že z vlastností (1) až (3) odvodíme další základní vlastnosti determinantu.

Úloha 3.1. Dokažte následující vlastnosti (1') a (4) až (10).

Poznámka. V jejich důkazu nemůžete používat nic jiného než vlastností (1) až (3) a vlastností již dokázaných. Pokud se nepodaří některou vlastnost dokázat, můžete ji přeskočit a dále používat (čímž pochopitelně dostanete méně bodů).

(1') První řádek není v ničem speciální, determinant je lineárně závislý na libovolném řádku matice. Této vlastnosti se říká *multilinearita.*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ \gamma \cdot c & \gamma \cdot d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(4) Pokud má determinant nulový řádek, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

(5) Pokud má determinant dva řádky stejné, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

(6) Přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému nemění determinant.

$$\begin{vmatrix} a+\gamma \cdot c & b+\gamma \cdot d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(7) Determinant trojúhelníkové matice T (horní či dolní) je roven součinu prvků na hlavní diagonále; $\det(T) = t_{1,1} \cdot t_{2,2} \cdots t_{n,n}$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad.$$

(8) Determinant umožňuje testovat regularitu. Je nenulový právě tehdy, když je matice regulární.

Nápověda. Aplikujte Gaussovu eliminaci, která nemění determinant (nebo alespoň nemění nenulovost). Jak dopadne, pokud je matice regulární? Jaký výsledek dostaneme pro singulární matici?

Poznámka. Z výše uvedených vlastností již vyplývá jednoznačnost determinantu. Totiž aplikováním Gaussovy eliminace získáme, že determinant je (až na znaménko) součin pivotů. Pro daný postup Gaussovy eliminace proto vždy získáme stejné číslo a determinant musí být určený jednoznačně. Protože však Gaussovu eliminaci můžeme provádět různým způsobem, není jasné, zda vždy dostaneme stejné číslo, a tedy jestli je determinant vůbec *dobře zadefinovaný.* Mohlo by se ještě stát, že nebude existovat žádná funkce splňující vlastnosti (1) až (3).

(9) Determinant součinu dvou matic je součin jejich determinantů, tedy platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) =$$
$$= (ad-bc)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Nápověda. Lze například postupovat následujícím trikem. Případ, kdy je B singulární, vyřešíme zvlášť. Pokud je B regulární, definujme zobrazení d:

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Potřebujeme pouze dokázat, že zobrazení d splňuje vlastnosti (1) až (3). Potom z jednoznačnosti determinantu dostaneme, že $d = \det$ (a teoreticky by ani jedna z funkcí nemusela vůbec existovat).

Matice P_π je permutační (odvozená od permutace π), pokud má v každém řádku a sloupci obsahuje právě jednu jedničku a na ostatních pozicích nuly; podrobněji v úloze 2 z první série.

Úloha 3.2. Jak vypadá determinant permutační matice P_π? Zkuste dokázat jak pomocí vlastností, tak pomocí definice (♣).

Zbývá ukázat poslední vlastnost (10) a tím bude náš seznam vlastností úplný.

(10) Determinant matice i její transpozice je stejný, tedy $\det A = \det A^\mathsf{T}$.

Nápověda. Problém je, že všechny předchozí vlastnosti determinantu hovoří o řádcích matice. Důkaz však lze založit na LDU dekompozici, kterou jsme si ukazovali na cvičení. Singulární případ A vyřešíme zvlášť. Pro každou regulární matici A platí

$$PA = LDU,$$

kde P je vhodná permutační matice, L je dolní a U je horní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a D je diagonální matice obsahující pivoty. Důkaz se provede aplikováním transpozice na LDU dekompozici a porovnáním determinantů.

Poslední vlastnost (10) prakticky zdvojuje seznam vlastností, které o determinantu známe. Získáváme podobné vlastnosti o sloupečcích matice: Determinant je lineárně závislý na libovolném sloupečku; pokud je libovolný sloupeček nulový nebo jsou dva sloupečky stejné, je determinant nulový; …

3.3 Ekvivalence s definicí pomocí formule (♣)

Zbývá dokázat, že determinant definovaný vlastnostmi (1) až (3) splňuje formuli (♣).

Úloha 3.3. Dokažte, že determinant definovaný (1) až (3) je ekvivalentní s definicí (♣).

Nápověda. Rozdělíme výpočet jednoho determinantu na výpočet n^n determinantů. Podle vlastnosti (1) rozdělíme determinant na n determinantů, každý z nich obsahuje pouze jedno číslo z prvního řádku a na zbývajících pozicích nuly:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Stejně tak rozdělíme i ostatní řádky, každý na n dalších determinantů:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

Tak získáme n^n matic (každá obsahuje právě jeden koeficient původní matice v každém řádku), jejichž determinanty budou triviální. Část z nich bude nulových a ty zbývající budou členy sumy ($\clubsuit$). Například pro výše uvedený determinant dostáváme

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 + ad - bc + 0 = ad - bc.$$

4 Hadamardovy matice dají nejvíce! (30 bodů)

V této úloze se budeme zabývat speciálními čtvercovými maticemi, které se nazývají Hadamardovy. Mají překvapivě zajímavou kombinatorickou strukturu a používají se například v teorii samoopravných kódu nebo ve statistice. Jeden ze základních otevřených problémů je, pro které velikosti vůbec existují. Ukážeme si konstrukci pro velikosti ve tvaru 2^k a také překvapivou souvislost Hadamardových matic s determinantem.

Definice. Matice $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ se nazývá *Hadamardova*, pokud platí

$$HH^\mathsf{T} = H^\mathsf{T} H = nI_n.$$

Tedy Hadamardova matice je tvořená ± 1 a má ortogonální řádky a sloupce.

Například Hadamardova matice řádu dva vypadá takto: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Nejprve vypozorujme:

Úloha 4.1. Nechť H je Hadamardova matice $n \times n$. Potom $n = 1, 2$ nebo je dělitelné čtyřmi.

Nápověda. Nejprve zkuste dokázat dělitelnost dvěma (s výjimkou $n = 1$). Pokud H je Hadamardova matice, můžeme s ní provádět určité úpravy, které „hadamardovost“ zachovávají.

Základní hypotéza Hadamardových matic říká, že Hadamardova matice existuje pro každé $n = 4k$. Je známo pouze několik různých konstrukcí, z nichž dostaneme Hadamardovy matice pouze pro některé řády.[2] Ukážeme si Sylvesterovu konstrukci pro $n = 2^k$. Pokud vymyslíte či nastudujete nějakou jinou konstrukci a naučíte mě ji, můžete dostat bonusové body.

Úloha 4.2. Dokažte, že existuje Hadamardova matice H_n velikosti $n \times n$ pro každé $n = 2^k$.

Nápověda. Zkuste objevit induktivní konstrukci, která vytvoří H_{2n} nějakým způsobem z matice H_n. Také můžete využít Kroneckerův součin matic, který se definuje takto: Nechť A je matice $m \times n$ a B je matice $p \times q$. Kroneckerův součin $A \otimes B$ je matice $mp \times nq$ tvořená $m \times n$ bloky velikosti $p \times q$ tak, že blok na souřadnicích (i, j) je matice $a_{i,j} B$. Jestliže A a B jsou Hadamardovy matice, jak vypadá $A \otimes B$? Příklad součinu $A \otimes B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad A \otimes B = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & 2 & & 3 & \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 6 & -3 \\ \hline 4 & & 5 & & 6 & \\ 8 & -4 & 10 & -5 & 12 & -6 \end{array}\right).$$

Na závěr dokažme, že Hadamardovy matice jsou extremální matice pro následující větu. Objevil ji sám Hadamard v roce 1893, čímž započal zkoumání Hadamardových matic.

Úloha 4.3. Mějme matici A velikosti $n \times n$, že $|a_{i,j}| \leq 1$ ve všech pozicích (i, j). Potom platí $|\det(A)| \leq n^{n/2}$ a rovnosti se nabývá právě tehdy, když A je Hadamardova matice.

Nápověda. Využijte toho, že absolutní hodnota determinantu odpovídá objemu rovnoběžnostěnu určeného řádky matice. Pokud máme rovnoběžnostěn určený vektory $\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(n)}$, jaký je jeho maximální objem v závislosti na normách $\|\mathbf{x}_{(1)}\|, \ldots, \|\mathbf{x}_{(n)}\|$? A kdy se tohoto maxima přesně nabývá?

[2] Otevřené řády do dvou tisíc jsou 668, 716, 892, 1004, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948 a 1964. Například matice řádu 428 byla zkonstruována teprve nedávno, v IPM v Tehránu v roce 2005.