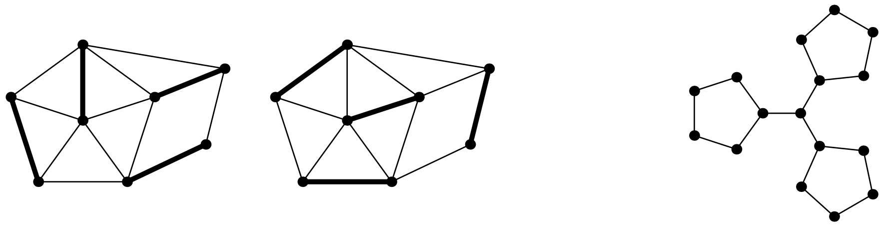
11 Determinují determinanty perfektní párování? (25 bodů)

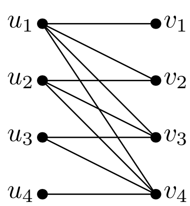
V této úloze si ukážeme jednu kombinatorickou aplikaci determinantů. *Párování* P je množina hran, které nesdílejí koncové vrcholy. Tedy žádný vrchol grafu je incidenční s nejvýše jednou hranou z P. Párování je *perfektní*, pokud obsahuje $\frac{n}{2}$ hran, kde n je počet vrcholů grafu; tedy každý vrchol je spárovaný s nějakým jiným. Pochopitelně ne každý graf obsahuje perfektní párovaní. Minimálně musí být počet vrcholů sudý, aby vůbec perfektní párování mohlo existovat. Na obrázku jsou pro graf vlevo vyznačena dvě různá perfektní párování, pro graf vpravo žádné perfektní párování neexistuje. (Proč?)



Pro jednoduchost se v této úloze zaměříme na bipartitní grafy. Mějme bipartitní graf G s dvěma partitami $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ten lze popsat incidenční matici partit I_G velikosti $m \times n$ takovou, že

$$(I_G)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } u_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{pokud } u_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Například pro níže uvedený graf G dostaneme následující matici I_G:



$$I_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aby perfektní párování vůbec mohlo existovat, musí platit $|U| = |V|$, tedy matice I_G musí být čtvercová. Vaším úkolem je zjistit, jaký je vztah mezi $\det(I_G)$ a existencí perfektního párování.

Úloha 11.1. Dokažte, že pokud $\det(I_G) \neq 0$, graf G má nutně perfektní párování.

Úloha 11.2. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí i obrácená implikace: Pokud G obsahuje perfektní párování, potom $\det(I_G) \neq 0$. Je nějaký vztah mezi hodnotou determinantu a počtem různých perfektních párování?

Poznámka. Výše uvedený vztah lze zobecnit i na nebipartitní grafy, i když je to maličko komplikovanější a souvisí to s počtem cyklických pokrytí grafu. Přesný počet perfektních párování bipartitního grafu je roven *permanentu* $\mathrm{perm}(I_G)$, což je „determinant bez znaménka“:

$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Určit počet perfektních párování i pro bipartitní graf (a tedy i výpočet permanentu matic obsahujících pouze nuly a jedničky) je #P-úplný problém, což znamená, že pro to (pravděpodobně) neexistuje polynomiální algoritmus.[1] Zatímco determinant můžeme spočítat efektivně, drobná změna v definici na permanent způsobí, že se tato formule efektivně určit nedá.

[1] Třída #P obsahuje počítací verze problémů z NP. Například problém existence hamiltonovské kružnice patří do NP a příslušný problém určení počtu různých hamiltonovských kružnic patří do #P. Pochopitelně každý problém z #P je alespoň tak těžký jako příslušný rozhodovací problém v NP. Problém je #P-úplný, pokud je to nejtěžší problém v #P.

12 Po stopách matic (25 bodů)

Pro čtvercovou matici A definujme její *stopu* $\operatorname{tr}(A)$ jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Na přednášce jste si pomocí charakteristického polynomu dokázali, že stopa $\operatorname{tr}(A)$ je rovna součtu vlastních čísel A. V této úloze ukážeme alternativní důkaz spolu s dalšími vlastnostmi stopy.

Je snadné nahlédnout, že stopa je lineární v koeficientech matice, tedy

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tr}(cA) = c \cdot \operatorname{tr}(A).$$

Stopa se nechová vůči součinu matic tak pěkně jako determinant, obecně $\operatorname{tr}(AB)$ je zcela rozdílná od $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$. Pro stopu však platí následující *cyklická vlastnost*:

Úloha 12.1. Dokažte pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, že platí

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA). \tag{1}$$

Poznamenejme, že také existuje velice hezká formule pro $\operatorname{tr}(C^{\mathsf{T}}D)$ v řeči Hadamardova maticového součinu $\circ$, což je součin po složkách. Nyní už je snadné dokázat, že maticová podobnost zachovává stopu a že stopa je rovna součtu vlastních čísel. Tedy stopa je vlastností lineárního zobrazení a nezáleží na konkrétní volbě báze.

Úloha 12.2. Dokažte, že maticová podobnost nemění stopu, tedy $\operatorname{tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.

Úloha 12.3. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Dokažte, že

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Nakonec si ukážeme alternativní definici stopy, podobně jako jsme v úloze 8, kdy jsme charakterizovali determinant pomocí vlastností. Překvapivě výše popsané vlastnosti určují stopu skoro jednoznačně. Aby byl popis jednoznačný, musíme zvolit hodnotu stopy pro jednu z matic, která ji má nenulovou.

Úloha 12.4. Nechť $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení, které splňuje vlastnost (1) a pro které $f(I) = n$. Dokažte, že potom $f = \operatorname{tr}$.

Nápověda. Stačí pochopit chování f pro matice $E_{(i,j)}$, které mají všechny koeficienty nulové a pouze jediný koeficient na pozici (i,j) roven jedné. To jsou vlastně vektory kanonické báze pro prostor čtvercových matic $\mathbb{R}^{n\times n}$. Stačí tedy ukázat, že $f(E_{(i,j)}) = \operatorname{tr}(E_{(i,j)})$.

Existuje pro stopu i nějaká pěkná geometrická motivace? O determinantu jsme si na cvičení řekli, že počítá transformaci objemu lineárního zobrazení. Překvapivě stopa souvisí s touto motivací, neboť popisuje derivaci determinantu, tedy lokální změnu objemu v nějaké sérii transformací. Přesněji vztah popisuje Jacobiho formule.

Mějme nějakou sérii matic $A(x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, a každý z koeficientů je nějaká derivovatelná funkce x. Například nechť

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

je série matic 2×2 reprezentující rotace v rovině. Jacobiho formule říká, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \det A(x) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{Adj}(A) \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right),$$

kde poslední derivace je po členech a $\operatorname{Adj}(A)$ je adjungovaná matice, jejíž koeficienty jsou tvořené determinanty s vyškrtnutým i-tým řádkem a j-tým sloupcem (s příslušným znaménkem).

Snadným výpočtem pro $R(\varphi)$ zjistíme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \det R(\varphi) = 0$. To dává smysl, neboť všechny matice rotace jsou ortogonální a mají stejný determinant.