

Kombinatorika a grafy I: série 2 – linearita střední hodnoty

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Jaká je střední hodnota počtu padlých ok při hodu

- a) n klasickými šestistěnnými kostkami a (1 bod)
b) n kostkami, které mají postupně $1, 2, \dots, n$ stěn, na kterých je postupně $1, 2, \dots, k$ ok. (2 body)

Úloha 2. Střední hodnota je lineární veličina. Nalezněte protipříklady proti následujícím vztahům, které pro ni obecně neplatí:

- a) Pro libovolné dvě veličiny X a Y vztah $E[XY] = E[X]E[Y]$. (1 bod)
b) Pro nenulovou veličinu X vztah $E[\frac{1}{X}] = \frac{1}{E[X]}$. (1 bod)

Úloha 3. Do jednoho divadla si na představení zašlo N pánů a každý z nich nechal v šatně klobouk. Po skončení představení však roztržitá šatnářka vracela pánům klobouky zcela náhodně (všechna možná rozdělení klobouků jsou stejně pravděpodobná). Jaká je střední hodnota počtu pánů, kteří dostali zpátky svůj klobouk? (3 body)

Úloha 4. Jednou jeden král pořádal hon¹ a zúčastnilo se ho N lovců. Každý z nich nezávisle vystřelil na jednoho z N zajíců. Za předpokladu, že každý zasažený zajíc umřel, jaká je střední hodnota živých zajíců? (3 body)

Úloha 5. Porovnejte následující funkce pro hodnoty $x \rightarrow \infty$. Tedy rozhodněte, do jakých asymptotických tříd vůči sobě patří (\mathcal{O} , Ω , Θ):

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = x^3, \quad f_3(x) = \ln x, \quad f_4(x) = \log_2 x^2, \quad f_5(x) = e^x, \quad f_6(x) = e^{\ln^2 x}, \\ f_7(x) = e^{3 \ln x}, \quad f_8(x) = x \log_3 x, \quad f_9(x) = 5x^3 - 7x^2 + 12x + 5.$$

(2 body)

¹ či spíše přestřelku??