Kombinatorika a grafy I: série 3 – částečná a lineární uspořádání

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Nakreslete Hasseův diagram množiny
a) $[20] = \{1, 2, \ldots, 20\}$ uspořádané dělitelností. *(1 bod)*
b) $X = \{2^k 3^l : k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$ uspořádáné dělitelností (všechna čísla dělitelná pouze 2 a 3). *(2 body)*

Úloha 2. Mějme Hasseův diagram pro přirozená čísla $\mathbb{N}$ uspořádaná dělitelností. Určete, jaký počet čar vede zespodu do čísla k. *(2 body)*

Úloha 3. Mějme částečné uspořádání $\leq$ množiny X. Definujme retězec jako posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z X taková, že $x_i \leq x_{i+1}$ pro všechna i. Jaká je délka maximálního řetězce následujicích uspořádání:
a) $X = \mathcal{P}([n])$, tedy všechny podmnožiny $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, a jsou uspořány inkluzí, tedy $x \leq y$, právě když $x \subseteq y$. *(1 bod)*
b) $X = [n]$ a jsou uspořádány dělitelností, tedy $x \leq y$, právě když $x \mid y$. *(2 body)*

Úloha 4. Uvažujme všechna lineární uspořádání na množině X.
a) Dokažte pro $X = [n]$, že libovolná dvě lineární uspořádání jsou izomorfní. *(1 bod)*
b) Nalezněte dvě neizomorfní lineární uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(2 body)*
c) Nalezněte spočetně mnoho neizomorfních lineárních uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(1 bod)*
d) Rozhodněte, zde existuje dokonce nespočetně mnoho neizomorfních lineárních uspořádání pro $X = \mathbb{N}$. *(3 body)*

Úloha 5. Definujme ostré částečné uspořádání jako relaci, která je tranzitivní a silně antisymetrická (pro všechna x, y platí $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$). Dokažte, že je tato definice ekvivalentní s definicí jako relace, která je tranzitivní a antireflexivní (pro všechna x platí $(x, x) \notin R$). *(1 bod)*