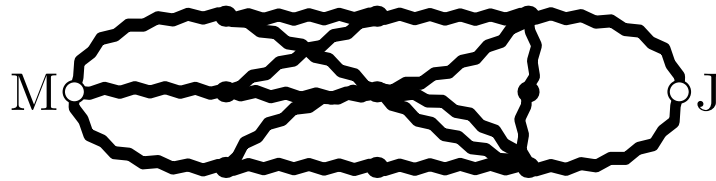


## Kombinatorika a grafy I: série 6 – $k$ -souvislost

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

**Úloha 1.** Na ostrově Papua-Nová Guinea řeší obyvatelé tamní vesnice ležící uprostřed jezera  $J$  následující problém: z moře  $M$  k nim po místním systému řek (viz obrázek) den co den připlouvají krokodýli a útočí na vesničany. Šaman se proto rozhodl na řece postavit stavidla tak, aby mohli regulovat všechny přítoky do jezera (stavidla lze stavět jen v místech, kde se řeka nevětví). Bohužel si nejsou jisti, zda umí najít optimální řešení, proto se obrací na Vás – jejich zajatce – s nabídkou, že Vás nesní, pokud rozmístění stavidel navrhnete Vy.  $(-c^2 + 4c - 3$  bodů;  $c$  značí počet použitých stavidel)



**Úloha 2.** Dokažte, že každý 2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.  $(2$  body)

**Úloha 3.** Rozhodněte, zda souvislý kubický (3-regulární) graf je hranově  $k$ -souvislý právě když je vrcholově  $k$ -souvislý.  $(d$  bodů;  $d$  je počet  $k \in \{1, 2, 3\}$ , pro než rozhodnete)

**Úloha 4.** Najděte podmínku v zadání předcházející úlohy, kterou když odstraníte, získali byste za její vyřešení ihned zápočet.  $(0$  bodů)

**Úloha 5.** Ukažte, že pro každý 3-souvislý graf  $G$  platí následující: po kontrakci hrany  $\{u, v\}$  zůstane 3-souvislý právě tehdy, když po odebrání vrcholů  $u$  a  $v$  z  $G$  bude 2-souvislý. Kontrakce hrany znamená, že slepíme oba koncové vrcholy do jednoho, přičemž hrany, které vedly do těchto vrcholů přepojíme do „slepence“, a odstraníme případné násobnosti hran.  $(3$  body)