Kombinatorika a grafy I: série 4 – KPR, SRR a jiné TLA

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Mějme bipartitní graf na $2n$ vrcholech takový, že každá partita má velikost n.

a) Dokažte, že pokud minimální stupeň G je alespoň $n/2$, pak G obsahuje perfektní párování. *(3 body)*

b) Stačilo by, kdyby minimální stupeň G byl alespoň $n/2 - 1$? *(1 bod)*

Úloha 2. Dokažte, že pro m mocninu dvou lze K_m rozložit na $m - 1$ hranově disjunktních perfektních párování. *(3 body)*

Úloha 3. Logické formule mohou obsahovat proměnné a logické spojky: konjunkce, disjunkce a negace. Formule je v tzv. konjunktivně normálním tvaru (CNF), pokud se skládá z konjunkcí klauzulí, kde klauzule je disjunkce proměnných resp. jejich negací. Například $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee a)$ je formule v CNF, avšak $(a \vee b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b)$ není. Poznamenejme jen na okraj, že každou logickou formuli lze převést do CNF. Uvažme formule, pro které každá klauzule obsahuje právě tři proměnné resp. jejich negace (jinými slovy, velikost každé klauzule je tři) a každá proměnná, ať už jako negace či jako gace, se vyskytuje v právě třech klauzulích. Dokažte, že potom vždy existuje přiřazení pravdivostních hodnot proměnným tak, že daná formule bude splněna. Pokud znáte SAT, by šlo zadání formulovat jednodušeji: dokažte, že 3,3-SAT formule je vždy splnitelná. *(4 body)*

Úloha 4. Dokažte, že přímky libovolné konečné projektivní roviny (KPR) mají systém různých reprezentantů (SRR). *(2 body)*

Úloha 5. Popište všechny systémy, které splňují axiomy (A1) a (A2) konečných projektivních rovin, ale nesplňují (A0). *(2 body)*

Úloha 6. Nalezněte maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 4 a dokažte, že je maximální. *(1 bod)*

Úloha 7. Pro $m \leq n$ definujeme latinský obdélník velikosti $m \times n$ jako obdélníkovou tabulku $m \times n$ vyplněna čísly $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, v jejímž každém řádku a každém sloupci se žádné dvě čísla neopakují. Kolik existuje latinských obdélníku řádu $2 \times n$? *(3 body)*