Kombinatorika a grafy I: první písemka

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat, můžete se samozřejmě odkazovat na tvrzení z přednášky či cvičení. Pro řešení nepoužívejte kalkulačky, cibulačky, zápisky, skripta, učebnice, čarodějnice, sousedy či jakékoli další zakázané pomůcky, tahák na vytvořující funkce používat můžete. V případě jakýchkoli nejasností se zeptejte cvičícího. Zadání si můžete nechat, na řešení máte 60 minut. Hodně štestí!

Úloha 1. Mějme šest skleniček a sedm druhů fazolí, od každého druhu sedm kousků (celkem tedy máme 49 fazolí). Dokažte, že ať jsou fazole rozmístěny jakkoli, vždy existuje jedna sklenička, ve které najdeme dva páry fazolí různého druhu. Pár jsou dvě fazole stejného druhu. *(4 body)*

Úloha 2. Kolika způsoby lze za sebe uspořádat písmena A, D, H, K, O, R, T, U tak, že vyškrtáním některých písmen nelze získat žádné ze slov AUTO, RUKA či HOD? Např. RAKUHTOD je špatné uspořádání, protože vyškrtnutím R, A, K, U, T dostaneme slovo HOD, popř. vyškrtnutím R, K, H, D dostaneme slovo AUTO. Naopak slovo DHUKOTAR je správné slovo. *(6 bodů)*

Úloha 3.

a) Kolik existuje permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ s právě jedním pevným bodem? *(4 body)*

b) Kolik existuje permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ s právě k pevnými body? *(6 bodů)*
Hint: vzpomeňte si na funkci šatnářky $\check{s}(n)$, *zkuste počet vyjádřit pomocí ní.*

Úloha 4.

a) Najděte vytvořující funkci pro posloupnost čísel $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots)$. *(2 body)*

b) Najděte vytvořující funkci pro posloupnost čísel $(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, \ldots)$. *(2 body)*

c) Najděte uzavřenou formuli pro n-tý člen posloupnosti určené vytvořující funkcí $\frac{1}{(1-2x)^2}$. *(2 body)*
Výslednou funkci stačí napsat jako součet několika funkcí, nemusíte součet převádět na společný jmenovatel.

Úloha 5. Buď $A(x)$ vytvořující funkce pro posloupnost čísel a_n.

a) Pomocí $A(x)$ vyjádřete vytvořující funkci pro posloupnost $s_n = n \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i$. *(5 bodů)*

b) Pomocí $A(x)$ vyjádřete vytvořující funkci pro posloupnost $t_n = \sum_{i=0}^{n} i \cdot a_i$. *(7 bodů)*

Úloha 6. Před prodejnou lístků stojí $2n$ lidí, jedna polovina z nich má v peněžence stokorunu, druhá polovina padesátikorunu. Jeden lístek stojí 50 korun a na začátku v pokladně nemají ani haléř. Kolika způsoby můžeme seřadit lidi před prodejnou tak, aby v pokladně měli vždy peníze na vrácení? *(7 bodů)*

Úloha 7. Buď L_n posloupnost čísel definovaná následujícím způsobem: *(9 bodů)*

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Odvoďte obecný vzorec pro L_n. Poznamenjme, že posloupnost L_n je známa jako Lucasova čísla.