Druhá písemka (05.01.2010)

V početních příkladech nezapomeňte **zapsat výsledek**, třeba výsledkem soustavy rovnic není matice v odstupňovaném tvaru a geometrický výsledek by měl mít geometrickou odpověď. Příklady se snažte řešit obecně, nesnažte se správné řešení uhodnout. Zkuste od každého druhu příkladu spočítat něco. Můžete používat všechny věty probrané na přednášce nebo cvičení. Přeji hodně štěstí ...

Příklad 1: Nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$ (doporučuji udělat zkoušku):

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Příklad 2: Nalezněte inverzní matice:

a) Invertujte matici $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) *Hnusnější, za víc bodů:* Invertujte matici $\mathbf{B}$ nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) *Jako bonus zkuste zobecnit řešení pro matici* $\mathbf{A}$*:* Jak vypadá inverzní matice nad $\mathbb{Z}_2$ k matici $n \times n$, která má na vedlejší diagonále nuly a mimo diagonálu jedničky.

Příklad 3: Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{P}$ všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše tři, s operacemi sčítání polynomů a násobení skalárem.

a) Jaká je dimenze vektorového prostoru $\mathbb{P}$?

b) Je množina

$$\{x^2 + 3x + 1, 2x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + x^2 + x, 3x^3 + x^2 + 3x + 4\}$$

lineárně nezávislá? Pokud ne, vyjádřete jeden vektor jako lineární kombinaci ostatních.

c) Jaké jsou souřadnice polynomu $4x^3 + 3x + 2$ vůči bázi

$$B = \{x^3 + x^2 + x, x^2 + x + 1, x + 1 + x^3, 1 + x^3 + x^2\}.$$

d) Lze polynomy $x^3 + x^2 + 3x - 1$ a $x^3 + x^2 + 3x + 1$ vyjádřit jako lineární kombinace polynomů $x^3 - 3x^2 + 2x + 3$, $-2x^2 - 2x - 2$, $x^2 + 2x + 3$ a $x^2 + x + 1$? Případně jaké jsou její koeficienty?

Příklad 4: Křížkovací test: Mějme deset vektorů $u_1, \ldots, u_{10}$ v $\mathbb{R}^7$. Rozhodněte, co pro tyto vektory platí, není potřeba odůvodňovat:

a) Vektory $u_1, \ldots, u_{10}$ (`jsou/mohou být/nejsou`) lineárně nezávislé.

b) Vektory $u_1, \ldots, u_{10}$ (`generují/mohou generovat/negenerují`) prostor $\mathbb{R}^7$.

c) Vektory $u_1, \ldots, u_{10}$ (`tvoří/mohou tvořit/netvoří`) bázi $\mathbb{R}^7$.

Příklad 5: Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{M}$ všech matic 2×2 nad $\mathbb{R}$, s operacemi maticové sčítání a násobení matice skalárem.

a) Dokažte, že $\mathbb{M}$ opravdu tvoří vektorový prostor.

Hint: Buď ověřte ve stručnosti axiomy, nebo ukažte vztah s jiným vektorovým prostorem.

b) Tvoří všechny matice $\mathbf{A}$ s hodností $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 1$ podprostor vektorového prostoru $\mathbb{M}$?

c) Jak vypadá lineární obal všech permutačních matic, tedy množiny

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) Jak vypadá lineární obal všech matic $\mathbf{A}$, které jsou invertovatelné?

Příklad 6: Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou na sebe kolmé, pokud jejich skalární součin je nulový. Pro naše účely je skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u}^T\mathbf{v})_{1,1} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Nad tělesem reálných čísel je pouze nulový vektor kolmý sám na sebe. Nalezněte nad jiným tělesem vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ (zkuste třeba $\mathbb{Z}_2$).

Příklad 7: Za hvězdičku: Která z vět nebo vlastností lineární algebry z přednášky nebo cvičení se vám nejvíce líbila? Proč?