Příklady ke cvičení (3.11.2009)

Příklad 1: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vyřešte maticové rovnice

a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$

b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$

c) $\mathbf{A}\mathbf{X}_3^{-1} = \mathbf{E}^T$

Příklad 2: Pro libovolnou grupu $\mathbb{G} = (G, \cdot, 1, ^{-1})$ dokažte jednoznačnost jednotky $1 \in G$ a pro každý prvek $a \in G$ jednoznačnost inverzního prvku a^{-1}.

Příklad 3: Rozhodněte, zda následující struktury tvoří grupu, a případně popište jednotku a inverzní prvky:

a) Všechny čtvercové matice $n \times n$ spolu s operací sčítání.

b) Všechny regulární matice $n \times n$ spolu s operací sčítání.

c) Všechny čtvercové matice $n \times n$ spolu s operací násobení.

d) Všechny regulární matice $n \times n$ spolu s operací násobení.

Příklad 4: Mějme dvě grupy $\mathbb{G} = (G, \cdot, 1_G, ^{-1})$ a $\mathbb{H} = (H, \cdot, 1_H, ^{-1})$. Dokažte, že přímý součin těchto grup, tedy struktura $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ vzniklá následujícím způsobem, tvoří opět grupu:

- Prvky jsou $G \times H$, tedy všechny dvojice (g, h) pro $g \in G$ a $h \in H$.
- Operace $\cdot$ je definována po složkách, tedy $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$ pro $g_1, g_2 \in G$ a $h_1, h_2 \in H$.

Navíc popište jednotkový prvek a inverzní prvky $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$.