Příklady ke cvičení (10.11.2009)

Příklad 1: Nechť $\mathbb{K}$ je těleso. Dokažte, že má následující strukturální vlastnosti. Pamatujte, že můžete využít pouze axiomů tělesa!

a) Pro každé $a, b, c \in \mathbb{K}$, které splňují $a + b = a + c$, platí $b = c$.

b) Pro každé $a \in \mathbb{K}$ platí $(-1) \cdot a = -a$, kde $-a$ je inverzní prvek ke sčítání.

c) Pro každé $a \in \mathbb{K}$ platí $a \cdot 0 = 0$.

d) Pro každé $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, které splňuje $a \cdot b = a \cdot c$, platí $b = c$.

e) Pro každé $a, b \in \mathbb{K}$, které splňuje $a \cdot b = 0$, je $a = 0$ nebo $b = 0$.

Příklad 2: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Příklad 3: Vyřešte soustavu lineárních rovnic v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= i \\ ix_1 + (1-i)x_2 &= -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + (2+2i)x_2 + 2ix_3 &= 1 \\ (1-i)x_1 + (1+3i)x_2 + (i-1)x_3 &= 0 \\ (1+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1+i)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Příklad 4: Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad a \odot u = u^a$$

Je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$?